

Mathematik für Anwender – Übungsblatt & Tutorium

Stefan KUNIS, Germain POULLOT, Anna STROTMANN

Oktober 2025 – Februar 2026

Jedes Übungsblatt enthält die Übungen (in der Regel Übungen 1 bis 4)

Ich (Germain) schreibe einige Übungen auf Englisch und übersetze sie dann ins Deutsche.

Nicht alle Aufgaben werden korrigiert: Für die restlichen Übungen sollten Sie zu den Sitzungen am Donnerstag oder Freitag kommen!

Each exercise sheet contains the exercises of the Übungsblatt (usually exercises 1 to 4)

I (Germain) am writing some exercises in English and then doing the translation to German.

Not all exercises are corrected: for the remaining one, come to the Thursdays' or Fridays' sessions!

Inhaltsverzeichnis

1		3
	Übungsblatt 1	3
	Tutoriumsblatt 1	5
	Loesungsblatt 1	7
2		10
	Übungsblatt 2	10
	Tutoriumsblatt 2	11
	Loesungsblatt 2	13
3		18
	Übungsblatt 3	18
	Tutoriumsblatt 3	20
	Loesungsblatt 3	21
4		25
	Übungsblatt 4	25
	Tutoriumsblatt 4	27
	Loesungsblatt 4	28
5		33
	Übungsblatt 5	33
	Tutoriumsblatt 5	35
	Loesungsblatt 5	37
6		43
	Übungsblatt 6	43
	Tutoriumsblatt 6	45
	Loesungsblatt 6	46

7		49
	Übungblatt 7	49
	Tutoriumsblatt 7	51
	Loesungblatt 7	53
8		58
	Übungblatt 8	58
	Tutoriumsblatt 8	60
	Loesungblatt 8	62
9		68
	Übungblatt 9	68
	Tutoriumsblatt 9	70
	Loesungblatt 9	72
10		79
	Übungblatt 10	79
	Tutoriumsblatt 10	81
	Loesungblatt 10	83
11		90
	Übungblatt 11	90
	Tutoriumsblatt 11	92
	Loesungblatt 11	94
12		101
	Übungblatt 12	101
	Tutoriumsblatt 12	103
	Loesungblatt 12	104
13		111
	Übungblatt 13	111
	Loesungblatt 13	113
14		118
	Übungblatt 14	118
	Tutoriumsblatt 14	120
	Loesungblatt 14	122

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 1

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[xor, 4+6 Punkte]

Seien A, B Aussagen. Die Aussage $A \text{ xor } B$ („xor“ bedeutet „exklusives oder“) ist wahr genau dann, wenn genau eine von den Aussagen A oder B wahr ist.

1. Schreiben Sie die Wahrheitstabelle für xor auf.
2. Drücken Sie $A \text{ xor } B$ mit Hilfe der bereits bekannten logischen Operatoren (Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz) aus!

Aufgabe 2

[Modus ponens, 3+3+4 Punkte]

Bei jeder von den folgenden Argumentationen bestimmen Sie, ob sie (logisch!) korrekt ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

1. „Wenn ich schuldig bin, soll ich bestraft werden. Ich bin nicht schuldig. Das bedeutet, dass man mich nicht bestrafen darf“.
2. „Wenn ich schuldig bin, soll ich bestraft werden. Ich soll bestraft werden. Das bedeutet, dass ich schuldig bin“.
3. „Wenn ich schuldig bin, soll ich bestraft werden. Man darf mich nicht bestrafen. Es folgt, dass ich nicht schuldig bin“.

Aufgabe 3

[Mengen, 1+1+1+1+2, 2+2 Punkte]

Folgende Mengen sind gegeben: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$.

1. Bestimmen Sie folgende Mengen:
 - (a) $A \times B$
 - (b) $B \times A$
 - (c) $A \cap B$
 - (d) $A \cup B$
 - (e) $A \setminus B$
2. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
 - (a) $\forall x \in A : x \in B$
 - (b) $\forall y \in A, \exists x \in B : x > y$

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Berechnen Sie und geben Sie die Lösung als vollständig gekürzten Bruch an:

$\bullet \frac{42 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 5},$	$\bullet \frac{2}{3},$	$\bullet \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}},$
$\bullet \frac{1024}{16 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4},$		
$\bullet \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{11}{13},$	$\bullet \frac{2}{3},$	$\bullet \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$
$\bullet \frac{x^7}{y^9} + \frac{x^7}{y^{10}} - \frac{y}{z^2},$		

2. Verwenden Sie die Potenzgesetze um folgende Ausdrücke zu vereinfachen:

$\bullet 2^{1024} - (2^{10})^{10} \cdot 2^{10^3} \cdot 2^{1024-1100},$	$\bullet 3^{-n} - 3^2 \cdot \left(\frac{2^3+1}{5^2+2}\right)^{n+2},$
$\bullet (xy)^7 + x^3y^5 \cdot (x^2y)^2,$	$\bullet (-2)^{2^3} \cdot 2^{-2^3} \cdot 2^{2^{-3}},$
$\bullet \frac{2x^3}{y^{n+2}} \cdot \left(\frac{x^4}{y^{n-3}}\right)^{-1}$	$\bullet (\sqrt{3})^5 \cdot (\sqrt[12]{27})^{-2},$
	$\bullet 39 + 52 - \sqrt{39^2 + 52^2}$

Hinweis: Wir schreiben a^{b^c} für $a^{(b^c)}$.

Abgabe: bis 22.10.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Wir wollen fünf Mengen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 bilden, die sich *paarweise schneiden* (d.h. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ für alle $i \neq j$) und so, dass der Schnitt jeder zwei Mengen in einer dritten enthalten ist:

$$A_i \cap A_j \subseteq A_k \quad \text{für ein } k \neq i, j.$$

Idee: Damit jede Schnittmenge in einer dritten enthalten sein kann, muss jedes Element in mindestens drei Mengen vorkommen. Wir suchen also die kleinste Grundmenge, für die dies möglich ist.

Beispiel (Minimalfall mit 5 Elementen):

$$A_1 = \{1, 2, 3\},$$

$$A_2 = \{2, 3, 4\},$$

$$A_3 = \{3, 4, 5\},$$

$$A_4 = \{4, 5, 1\},$$

$$A_5 = \{5, 1, 2\}.$$

”

Diese Antwort enthält einen Fehler: Welchen?

Aufgabe 6

[Satz von Peirce]

Zeigen Sie, dass für A und B zwei Aussagen gelten (schreiben Sie die Wahrheitstabelle):

$$\left((A \Rightarrow B) \Rightarrow A \right) \Leftrightarrow A$$

Aufgabe 7

[Disjunktionsprinzip]

Zeigen Sie, dass für A und B zwei Aussagen gelten (schreiben Sie die Wahrheitstabelle):

$$\left((A \Rightarrow B) \text{ und } ((\text{nicht } A) \Rightarrow B) \right) \Leftrightarrow B$$

Aufgabe 8

[Schatztruhen]

Aladdin findet zwei Schatztruhen, I und II. Auf der Schatztruhe I steht geschrieben „Mindestens eine der Truhen enthält einen Schatz“. Auf der Truhe II steht geschrieben „Die Truhe I enthält eine tödliche Falle“. Aladdin weiß, dass entweder beide Nachrichten wahr oder beide Nachrichten falsch sind und, dass jede Schatztruhe entweder einen Schatz oder eine tödliche Falle enthält. Welche Truhe soll er öffnen?

Hinweis: Betrachten Sie die Aussagen A: „Truhe I enthält einen Schatz “ und B: „Truhe II enthält einen Schatz“.

Aufgabe 9

[Karten]

Vier Karten liegen auf einem Tisch. Auf einer Seite steht jeweils eine Zahl, auf der anderen Seite eine Farbe. Die sichtbaren Seiten zeigen 3, 8, blau und rot. Was ist die kleinste Anzahl von Karten, dass Sie umkehren müssen, um zu überprüfen, ob die folgende Aussage A wahr ist? Welche Karten müssen Sie in diesem Fall umkehren?

A: „Wenn eine Karte eine gerade Zahl auf einer Seite hat, dann ist die andere Seite blau.“

Aufgabe 10

[Symmetrische Differenz]

Die folgende Operation, bezeichnet mit Δ , wird als *symmetrische Differenz* zwischen zwei Mengen A und B bezeichnet:

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Zeigen Sie, dass die symmetrische Differenz kommutativ ($A\Delta B = B\Delta A$) und assoziativ ($A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$) ist. Denken Sie daran, sie zu zeichnen!

Hat sie ein neutrales Element (ein Menge X mit $A\Delta X = A$ für alle Menge A)? Gibt es Inverse für einige Elemente (für welche Menge A , gibt es ein Menge X mit $A\Delta X = X\Delta A = \emptyset$)?

(Ist die symmetrische Differenz über die Vereinigungsmenge oder die Schnittmenge verteilt?)

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 1

Aufgabe 1

[xor]

1.

A	B	$A \text{ xor } B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2. $A \text{ xor } B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ (A aber nicht B ODER B aber nicht A)
 $A \text{ xor } B = \neg(A \Leftrightarrow B)$ (A und B sind nicht beide wahr oder beide falsch)

Aufgabe 2

[Modus ponens]

Wir betrachten folgende Aussagen:

A : Ich bin schuldig

B : Ich soll bestraft werden

Die Frage ist jeweils, ob die Implikation $A \Rightarrow B$ die zweite Implikation impliziert. Dazu schreiben wir die Wahrheitstabelle für die möglichen Implikationen mit A , B , $\neg A$ und $\neg B$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$B \Rightarrow A$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1

- „Ich bin nicht schuldig. Das bedeutet, dass man mich nicht bestrafen darf“ = $\neg A \Rightarrow \neg B$
falsch (dies folgt **nicht** aus $A \Rightarrow B$. Zum Beispiel nehme A falsch und B wahr, so gilt $A \Rightarrow B$ aber $\neg A \Rightarrow \neg B$ nicht.)
- „Ich soll bestraft werden. Das bedeutet, dass ich schuldig bin“ = $B \Rightarrow A$
falsch (dies folgt **nicht** aus $A \Rightarrow B$. Zum Beispiel nehme A falsch und B wahr, so gilt $A \Rightarrow B$ aber $B \Rightarrow A$ nicht.)
- „Man darf mich nicht bestrafen. Es folgt, dass ich nicht schuldig bin“ = $\neg B \Rightarrow \neg A$
richtig (dies folgt aus $A \Rightarrow B$. Die zwei Implikationen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind sogar äquivalent.)

Aufgabe 3

[Mengen]

- Bestimmen Sie folgende Mengen:
 - $A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 0), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$
 - $B \times A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$
 - $A \cap B = \{2\}$
 - $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$
 - $A \setminus B = \{1, 3\}$
- Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
 - $\forall x \in A : x \in B$: falsch ($1 \in A$ aber $1 \notin B$)
 - $\forall y \in A, \exists x \in B : x > y$: wahr (für alle $y \in A$ gilt $y < 6 \in B$)

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1.

- $\frac{51}{4}$
- 4
- $\frac{110}{273}$
- $\frac{x^7(y+1)z^2-y^{11}}{y^{10}z^2}$
- $\frac{1}{6}$
- $\frac{8}{3}$
- 5
- $\frac{4}{7}$

2. • 0

- $2x^7y^7$

- $\frac{2}{xy^5}$

- 0

- $2^{1/8} = \sqrt[8]{2}$

- 9

- $39 + 52 - \sqrt{39^2 + 52^2} = 13 \cdot 3 + 13 \cdot 4 - \sqrt{13^2 \cdot 3^2 + 13^2 \cdot 4^2} = 13 \cdot (3 + 4 - \sqrt{9 + 16}) = 13 \cdot (7 - \sqrt{25}) = 26$

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

$A_1 \cap A_5 = \{1, 2\}$, aber es gibt kein $k \notin \{1, 5\}$ mit $\{1, 2\} \subseteq A_k$.

Aufgabe 6

[Satz von Peirce]

A	B	$\alpha : A \Rightarrow B$	$\beta : \alpha \Rightarrow A$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Da die Spalten B und β gleich sind, gilt die Äquivalenz: $\beta \Leftrightarrow B$.

Aufgabe 7

[Disjunktionsprinzip]

A	B	$\alpha : A \Rightarrow B$	$\beta : (\text{nicht } A) \Rightarrow B$	$\gamma : \alpha \text{ und } \beta$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Da die Spalten B und γ gleich sind, gilt die Äquivalenz: $\gamma \Leftrightarrow B$.

Aufgabe 8

[Schatztruhen]

Wir schreiben

A : Truhe I enthält einen Schatz

B : Truhe II enthält einen Schatz

Dann gilt für die Aussagen a_1 auf Truhe I und a_2 auf Truhe II:

$$a_1 = A \vee B, \quad a_2 = \neg A.$$

Falls beide Nachrichten wahr sind, gilt

$$a_1 \wedge a_2 = (A \vee B) \wedge (\neg A) = (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A) = B \wedge \neg A,$$

denn $A \wedge \neg A$ kann nicht stimmen. Also stimmt nur die zweite Aussage (Truhe II enthält einen Schatz).

Falls beide Nachrichten falsch sind, gilt

$$\neg a_1 \wedge \neg a_2 = (\neg A \wedge \neg B) \wedge (\neg \neg A) = (\neg A \wedge \neg B) \wedge A = \neg A \wedge A \wedge B,$$

ein Widerspruch.

Es folgt, dass beide Nachrichten wahr sind, also sollte er Truhe II öffnen.

Aufgabe 9

[Karten]

Wir betrachten die Aussagen

A : Eine Karte hat eine Gerade Zahl auf der Zahlseite

B : Eine Karte ist auf der farbigen Seite blau

Wir wollen überprüfen, ob $A \Rightarrow B$. Dazu schreiben wir die Wahrheitstabelle für $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Die Karten auf dem Tisch können wir durch die Aussagen A und B interpretieren:

$$3 = \neg A$$

$$8 = A$$

$$\text{blau} = B$$

$$\text{rot} = \neg B$$

Von der Wahrheitstabelle sehen wir, dass wenn $\neg A$ gilt, es egal ist, ob B gilt oder nicht, denn $A \Rightarrow B$ ist wahr in beiden Fällen. Also müssen wir die erste Karte (mit 3 darauf) nicht umkehren.

Das Gleiche gilt für B : Wenn B wahr ist, dann ist es egal, ob A wahr oder falsch ist, in beiden Fällen gilt die Implikation $A \Rightarrow B$. Das heißt, wir müssen die blaue Karte auch nicht umkehren.

Anders ist bei A und $\neg B$. Beim Ersteren müssen wir schauen, ob B stimmt oder nicht und beim Letzteren, ob A stimmt oder nicht. Wir müssen also die Karten mit 8 (A) und rot ($\neg B$) umkehren, um zu überprüfen, ob die Implikation stimmt oder nicht.

Aufgabe 10

[Symmetrische Differenz]

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 2

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Induktion, 5+5 Punkte]

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie durch Induktion über n , dass Folgendes gilt:

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Aufgabe 2

[Harmonische Reihe, 3+7 Punkte]

1. Beweisen Sie: Falls $\frac{1}{2} = m + \frac{p}{q}$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ und p, q teilerfremd, so muss q gerade sein.
2. Beweisen Sie: Für kein $n \geq 2$ ist $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ eine ganze Zahl.

Hinweis: Betrachten Sie die größte Potenz j mit $2^j \leq n$ und schreiben Sie $2^{j-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Versuchen Sie die Aussage mit einem Widerspruchsbeweis zu begründen. Aufgabenteil a) könnte sich dabei als nützlich erweisen.

Aufgabe 3

[Komplexe Zahlen, 3+3+4 Punkte]

Bestimmen Sie jeweils alle $w, y, z \in \mathbb{C}$, sodass die folgenden Gleichheiten gelten.

1. $z + i = \frac{1}{z} + \frac{1}{i}$
2. $\bar{w} = i(w - 1)$
3. $y^2 \cdot \bar{y} = y$

Wie viele Lösungen gibt es jeweils? Geben Sie alle Lösungen an.

Hinweis: Es kann passieren, dass einige Gleichungen keine Lösungen haben.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Verwenden Sie die Logarithmengesetze um folgende Ausdrücke zu vereinfachen:

- $\log_2(2^{1024}) + \log_3(3^{1024}) + \log_{91}(1)$
- $\log_{10}(10x) - \log_{10}(x)$
- $\log_{10}(1024) \cdot \log_2(10)$
- $\log\left(\frac{e^x}{e^y}\right)$ (manche schreiben $\ln$)

2. Lösen Sie folgende Gleichungen:

- $\frac{x}{3} - x = 4$
- $x^2 - 7 = 2$
- $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = -2$
- $\frac{1}{2}x^3 + 3 = -1$
- $(x - 1337)(x + 42)(x - 17) + 91 = 91$
- $17 \cdot (1909 + 1024) = (2^4 + 1)(1024 + x)$
- $\frac{1}{\pi}(\pi x + x)x = \frac{(\pi^2 + \pi)x}{\pi}$

Abgabe: bis 29.10.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Behauptung: Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\left| \frac{1+zi}{1-zi} \right| = 2 \iff z \text{ ist rein imaginär.}$$

Beweis (kurz): Schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$1 + zi = (1 - y) + ix, \quad 1 - zi = (1 + y) - ix$$

und somit

$$\left| \frac{1+zi}{1-zi} \right|^2 = \frac{(1-y)^2 + x^2}{(1+y)^2 + x^2}.$$

Setze dies gleich 4:

$$\begin{aligned} \frac{(1-y)^2 + x^2}{(1+y)^2 + x^2} = 4 &\implies x^2 + (1-y)^2 = 4(x^2 + (1+y)^2) \\ &\implies 3x^2 + 3y^2 + 10y + 3 = 0 \implies x^2 + y^2 + \frac{10}{3}y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Da $x^2 \geq 0$, folgt $x = 0$. Also ist $z = iy$ rein imaginär.

„

Das ist falsch, finden Sie heraus warum.

Aufgabe 6

[Polarform]

1. Schreiben Sie $z = 2 - 2i$ in der Polarform (d.h. bestimmen Sie r und θ). Bilden Sie z auf der komplexen Ebene ab.
2. Schreiben Sie $w = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ in der Form $w = a + ib$. Bilden Sie w auf der komplexen Ebene ab.

Aufgabe 7

[Stapel]

Sie haben $n \geq 2$ Münzen und teilen diese in zwei Stapel S_1 und S_2 auf. Multiplizieren Sie die Anzahl in jedem Stapel ($m_1 = |S_1| \cdot |S_2|$). Dann teilen Sie jeden Stapel nochmals in zwei Stapel auf ($S_1 \rightarrow S_{11}$ und S_{12} , $S_2 \rightarrow S_{21}$ und S_{22}), multiplizieren Sie die Anzahl Münzen in den neuen Stapeln ($m_2 = |S_{11}| \cdot |S_{12}|$, $m_3 = |S_{21}| \cdot |S_{22}|$).

Sie wiederholen diesen Prozess, bis es in jedem Stapel genau eine Münze gibt. Nun summieren Sie alle Produkte $m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$. Gegeben n , welche Werte kann m annehmen?

Aufgabe 8

[Cubic Summe]

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie durch Induktion über n , dass Folgendes gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Aufgabe 9

[Teile ein Quadrat...]

Male ein Quadrat und teile dieses Quadrat in 4 Quadrate, dann in 6 Quadrate, 7, 8, 9, 10 und 11.

Zeige, dass ein Quadrat in n Quadrate für $n \geq 6$ geteilt werden kann.

(Wie zählt man die Anzahl der Möglichkeiten ein Quadrat in n Quadrate zu teilen?)

Aufgabe 10

[Punkte]

Finden Sie die komplexen Zahlen z , sodass in der komplexen Ebene die Punkte z, z^2, z^4 auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 11

[Real Komplexe]

Sei $\lambda \neq -i$. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann ist, wenn $\left| \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i} \right| = 1$.

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 2

Aufgabe 1

[Induktion]

1. $n = 0$: $0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}$, also stimmt die Formel im Fall $n = 0$.

Nehme jetzt an, dass die Formel für alle $0 \leq p < n$ gilt. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k^2 &= n^2 + \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = n^2 + \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} \\ &= n^2 + \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \\ &= n^2 + \frac{(n^2-n)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{(6n^2) + (2n^3 - 3n^2 + n)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\end{aligned}$$

Wir überprüfen:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

also gilt die Formel für alle $n \geq 0$.

2. $n = 0$: $\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1$. Wir überprüfen:

$$\frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = \frac{1 - x}{1 - x} = 1,$$

also stimmt die Formel im Fall $n = 0$.

Nehme jetzt an, dass die Formel für alle $0 \leq p < n$ gilt. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n x^k &= x^n + \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ &= x^n + \frac{1 - x^{(n-1)+1}}{1 - x} \quad (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ &= \frac{x^n(1 - x) + (1 - x^n)}{1 - x} \\ &= \frac{x^n - x^{n+1} + 1 - x^n}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},\end{aligned}$$

also gilt die Formel für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 2

[Harmonische Reihe]

1. Nehme an, dass $\frac{1}{2} = m + \frac{p}{q}$. Dann gilt folgendes:

$$\begin{aligned}2q \cdot \frac{1}{2} &= 2q \cdot \left(m + \frac{p}{q}\right) \\ q &= 2(q \cdot m + p)\end{aligned}$$

Da $q, m, p \in \mathbb{Z}$ ist auch $q \cdot m + p \in \mathbb{Z}$, also ist die rechte Seite eine gerade Zahl. Es folgt, dass q gerade ist.

2. Nehme an, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $n \geq 2$, sodass $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ eine ganze Zahl $a \in \mathbb{N}$ ist. Schreibe j wie im Hinweis. Dann gilt

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^j} + \cdots + \frac{1}{n} \\ 2^{j-1}a &= 2^{j-1} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^j} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= 2^{j-1} + 2^{j-2} + \frac{2^{j-1}}{3} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{2^{j-1}}{n} \end{aligned}$$

Die rechte Seite können wir aufteilen in ganze Zahlen $m_1 + m_2 + \dots$ und Brüche $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \dots$, wobei p_i, q_i jeweils teilerfremd sind und p_i eine Potenz von 2 ist. Dabei gilt: q_i kann nur gerade sein, wenn $p_i = 1$ ist, was genau einmal passiert (indem wir $\frac{1}{2^j}$ mit 2^{j-1} multiplizieren). Das heißt:

$$\frac{1}{2} = 2^{j-1}a - m_1 - m_2 - \cdots - \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} - \dots,$$

wobei alle q_i ungerade sind. Wenn wir aber gekürzte Brüche mit ungeraden Nennern summieren, erhalten wir entweder eine ganze Zahl d oder einen Bruch mit ungeradem Nenner $\frac{p}{q}$.

Im ersten Fall hätten wir $\frac{1}{2}$ ist die Summe von ganzen Zahlen, ein Widerspruch. Im zweiten Fall hätten wir $\frac{1}{2}$ ist die Summe von einer ganzen Zahl und einem Bruch mit ungeradem Nenner, was ein Widerspruch zu a) ist. Es kann also kein solches a geben.

Aufgabe 3

[Komplexe Zahlen]

1. Schreibe $z = a + ib$ für reelle Zahlen a, b . Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit iz :

$$\begin{aligned} iz(z+i) &= iz \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{i} \right) \\ iz^2 - z &= i + z \\ 0 &= iz^2 - 2z - i \\ &= i(a+ib)^2 - 2(a+ib) - i \\ &= i(a^2 + 2iab - b^2) - 2a - 2ib - i \\ &= ia^2 - 2ab - ib^2 - 2a - 2ib - i \end{aligned}$$

Vom Imaginärteil erhalten wir

$$0 = a^2 - b^2 - 2b - 1 = a^2 - (b+1)^2,$$

und vom Reellteil

$$0 = -2ab - 2a.$$

Die zweite Gleichung gibt uns, dass entweder $a = 0$ oder $b = -1$.

Im Fall $a = 0$ ergibt die erste Gleichung $(b+1)^2 = 0$, also $b = -1$.

Im Fall $b = -1$ ergibt die erste Gleichung $a^2 = 0$, also $a = 0$. Das heißt: es gibt genau eine Lösung, nämlich $(a, b) = (0, -1)$, oder $z = -i$.

2. Schreibe $w = a + ib$ für reelle Zahlen a, b .

$$\begin{aligned} \overline{(a+ib)} &= i(a+ib-1) \\ a-ib &= ia-b-i \end{aligned}$$

Wenn wir die reellen Teile vergleichen, gilt $a = -b$. Die komplexen Teile: $-b = a - 1$. Dies ist ein Widerspruch da $-1 \neq 0$, also gibt es keine Lösungen.

3. Schreibe $y = a + ib$ für reelle Zahlen a, b . Eine Lösung ist $y = 0$ (d.h. $a = b = 0$). Um andere Lösungen zu finden, nehmen wir nun an, dass $y \neq 0$. Dann können wir beide Seiten mit y kürzen:

$$1 = y \cdot \bar{y} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Dazu gibt es unendlich viele Lösungen, nämlich alle Punkte (a, b) am Einheitskreis: $y = \cos \theta + i \sin \theta$ für irgendein $\theta \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1. Verwenden Sie die Logarithmengesetze um folgende Ausdrücke zu vereinfachen:

- $2048 = 2^{11}$

- 10

- 1

- $x - y$

2. Lösen Sie folgende Gleichungen:

- $x = -6$

- $x = 1337$ or $x = -42$ or $x = 17$

- $x = 3$ or $x = -3$

- $x = 1909$

- $x = -2$

- $x = 0$ or $x = \pi$

- $x = -2$

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Für $z = i$, dann gilt: $\left| \frac{1+zi}{1-zi} \right| = \left| \frac{0}{2} \right| = 0 \neq 2$.

Aufgabe 6

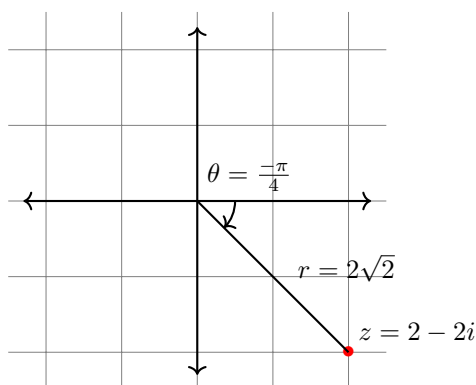
[Polarform]

1. Es gilt

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

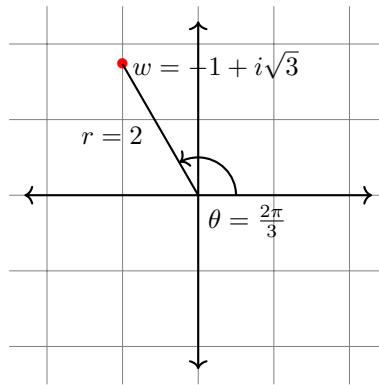
$$\theta = -\frac{\pi}{4} \text{ (bestimmt man am besten von der Geometrie, siehe Abbildung)}$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$$



2. Es gilt $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wir erhalten

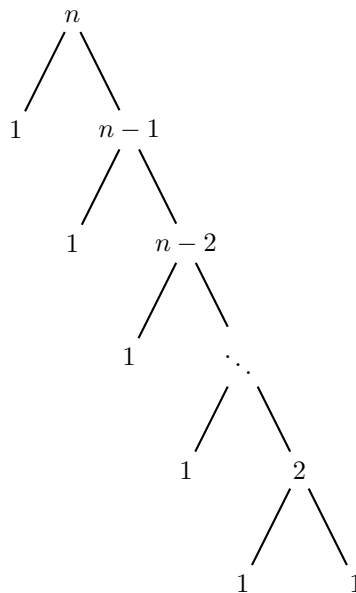
$$w = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + \sqrt{3}i.$$



Aufgabe 7

[Stapel – Bonus]

Wenn wir dies für kleine n ausprobieren (z.B. $n = 4, n = 5$), sehen wir, dass es jeweils nur eine Möglichkeit für m gibt. Am einfachsten teilen wir die Stapel so auf, sodass wir eine Stapel mit nur einer Münze haben (die wir danach ignorieren können):



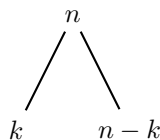
Dadurch bekommen wir eine Summe von

$$1 \cdot (n-1) + 1 \cdot (n-2) + \cdots + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nun versuchen wir, dies durch Induktion zu beweisen.

Für $n = 2$ gibt es nur eine Möglichkeit: Wir teilen die 2 Münzen in zwei Stapeln auf mit jeweils eine Münze. Das Produkt $m_1 = 1 \cdot 1 = 1$, und dies ist der einzige Term in der Summe. Darüber hinaus gilt $\frac{2(2-1)}{2} = 1$, also stimmt die Formel für den Fall $n = 2$.

Nun nehmen wir an, dass die Formel für alle $2 \leq p < n$ gilt. Gegeben n Münzen teilen wir sie in zwei Stapeln mit k bzw $n - k$ Münzen auf für eine Zahl $k \geq 1$.



Fall 1 ($k = 1$): Der erste Term im Produkt ist $1 \cdot (n - 1)$. Danach können wir für die rechte Stapel die Induktionsannahme anwenden: Von dieser Stapel erhalten wir nun $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Insgesamt ergibt das

$$n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(2n-2) + (n^2 - 3n + 2)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

was zu beweisen war.

Fall 2 ($k \geq 2$): Das erste Produkt ist nun $k(n - k)$. In diesem Fall wenden wir die Induktionsannahme bei beiden Stapeln an. Dies ergibt für die ganze Summe

$$\begin{aligned} k(n-k) + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \\ = \frac{(2kn - 2k^2) + (k^2 - k) + (n^2 - kn - n - kn + k^2 + k)}{2} \\ = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

also haben wir die Formel bewiesen.

Aufgabe 8

[Cubic Summe]

Für $n = 0$, es ist klar.

Nehme jetzt an, dass die Formel für alle $0 \leq p < n$ gilt. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^3 &= n^3 + \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = n^3 + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \\ &= \frac{4n^3}{4} + \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Dann gilt (Vorlesung): $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Es folgt:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Aufgabe 9

[Teile ein Quadrat...]

Aufgabe 10

[Affixpunkte]

Aufgabe 11

[Real Komplexe]

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 3

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Ungleichheit, 5+5 Punkte]

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass für $n \geq 3$ die Beziehung

$$n^2 \geq 2n + 1$$

gilt.

Hinweise: Der Induktionsanfang ist $n = 3$.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass für $n \geq 4$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Hinweise: Aufgabenteil 1.1 könnte hilfreich sein.

Aufgabe 2

[Vielfaches von 43, 10 Punkte]

Zeige durch Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Aufgabe 3

[Betragsfunktion, 2+2+3+3 Punkte]

Lösen Sie folgende Ungleichungen bzw. Gleichungen und skizzieren Sie die Lösungsmenge auf dem Zahlenstrahl.

1. $|x - 5| < 7$
2. $|x - 3| + 2|x - 7| = 6$
3. $|x - 3| < |x - 8|$
4. $|x + 1| = 2x$

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

- $7x^2 + 23x + 6 = 0$

- $x^2 - x - 1 = 0$

- $x^2 + x + 1 = 0$

- $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 1$

- $(m + 3)x^2 + 2m^2 = m^2x + 5mx$ (geben Sie die Lösungen als Funktion von m an)

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

- $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

- $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

- $\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$

- $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$

- $\prod_{k=1}^n 3^k$

- $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$

- $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

2 Punkte

Abgabe: bis 05.11.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Beispiel für eine Gleichung mit genau 5 Lösungen (keine Produkte): Betrachte die Gleichung

$$|x - 0| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 6| = 8.$$

Begründung: Die linke Seite ist eine Summe von Absolutbeträgen, die auf jedem Intervall zwischen den Punkten 0, 1, 3, 5, 6 linear ist. Durch geeignete Wahl der Konstanten ergibt sich genau eine Lösung pro "Linearabschnitt" mit Summe 8, sodass die Gleichung genau die fünf Lösungen

$$x = 0, 1, 3, 5, 6$$

hat.

”

Das ist falsch, finden Sie heraus warum.

Aufgabe 6

[Infimum und Supremum]

Existiert jeweils bei den folgenden Mengen ein Infimum und ein Supremum in $\mathbb{R}$? Falls ja, geben Sie sie an. Begründen Sie sorgfältig Ihre Antwort.

1. $\left\{ \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\}$

Aufgabe 7

[Die Farbe der Pferde]

In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei $A(n)$ die Aussage, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Induktionsanfang: Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt $n + 1$ Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden n Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese $n + 1$ Pferde überhaupt die gleiche Farbe“. Wo liegt der Fehler von dieser Argumentation?

Aufgabe 8

[Teilbarkeit]

Beweisen Sie die Proposition:

P : Wenn die ganze Zahl $(n^2 - 1)$ nicht durch 8 teilbar ist, dann ist n gerade.

Hinweis: Wir können kontrapositiv argumentieren.

Aufgabe 9

[Irrationale Nullstellen]

Zeigen Sie: Wenn α eine Nullstelle des Polynoms $aX^2 + bX + c$ mit ungeraden Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ist, dann ist α irrational.

Was passiert mit den rationalen Nullstellen eines Polynoms beliebigen Grades mit rationalen Koeffizienten?

Aufgabe 10

[$\sqrt{2}$]

Zeigen Sie, dass $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ nicht leer und beschränkt ist, aber keine Obergrenze hat. (Führen Sie $B = \{y \in \mathbb{Q}_+ : y^2 \geq 2\}$ ein.)

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 3

Aufgabe 1

[Ungleichheit]

1. Wir beweisen diese Aussage mit Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 3$ ist $3^2 = 9 \geq 7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Induktionsannahme: $2n + 1 \leq n^2$. Zu zeigen: $2(n + 1) + 1 \leq (n + 1)^2$.

$$\begin{aligned} 2(n + 1) + 1 &= (2n + 1) + 2 \\ &\leq n^2 + 2 \\ &\leq n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

2. *Induktionsanfang:* $n = 4$. In diesem Fall gilt

$$2^4 = 16 \geq 16 = 4^2.$$

Induktionsannahme: Nehme jetzt an, dass $2^n \geq n^2$. Wir zeigen: $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2 \cdot n^2 && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= n^2 + n^2 \\ &\geq n^2 + 2n + 1 && (1a) \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

[Vielfaches von 43]

Induktionsanfang: $n = 0$. In diesem Fall gilt

$$6^{0+2} + 7^{2 \cdot 0+1} = 6^2 + 7^1 = 36 + 7 = 43,$$

was natürlich ein Vielfaches von 43 ist.

Induktionsannahme: Es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $6^{n+2} + 7^{2n+1} = 43k$.

Äquivalent können wir schreiben $6^{n+2} = 43k - 7^{2n+1}$.

Wir wollen zeigen, dass es ein $k' \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $6^{(n+1)+2} + 7^{2(n+1)+1} = 43k'$:

$$\begin{aligned} 6^{(n+1)+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6(43k - 7^{2n+1}) + 49 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 43 \cdot (6k) - 6 \cdot 7^{2n+1} + 49 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 43 \cdot (6k) + (-6 + 49)7^{2n+1} \\ &= 43 \cdot (6k) + 43 \cdot (7^{2n+1}) \\ &= 43 \cdot (6k + 7^{2n+1}). \end{aligned}$$

Wir nehmen also $k' := 6k + 7^{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

[Betragsfunktion]

1. Wir betrachten zwei Fälle: I. $x < 5$, II. $x \geq 5$:

I. $x < 5 \Rightarrow |x - 5| = -(x - 5)$

$$-(x - 5) < 7$$

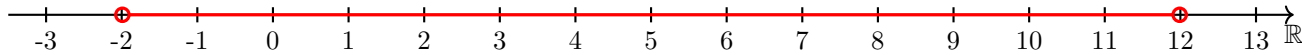
$$x - 5 > -7$$

$$x > -2$$

II. $x \geq 5 \Rightarrow |x - 5| = x - 5$

$$x - 5 < 7 \quad \Rightarrow \quad x < 12$$

Die Lösungsmenge ist $-2 < x < 12$.



2. Hier betrachten wir drei Fälle: I. $x < 3 < 7$, II. $3 \leq x < 7$, III. $3 < 7 \leq x$:

I. $x < 3 < 7 \Rightarrow |x - 3| = -(x - 3), |x - 7| = -(x - 7)$

$$-(x - 3) - 2(x - 7) = 6$$

$$-3x + 17 = 6$$

$$-3x = -11$$

$$x = \frac{11}{3} > 3 \quad (\text{Widerspruch})$$

II. $3 \leq x < 7 \Rightarrow |x - 3| = x - 3, |x - 7| = -(x - 7)$

$$x - 3 - 2(x - 7) = 6$$

$$-x + 11 = 6$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

III. $3 < 7 \leq x \Rightarrow |x - 3| = x - 3, |x - 7| = x - 7$

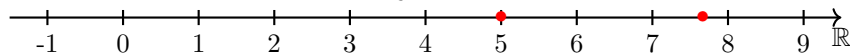
$$x - 3 + 2(x - 7) = 6$$

$$3x - 17 = 6$$

$$3x = 23$$

$$x = \frac{23}{3}$$

Die Lösungsmenge ist die zwei Punkte $\{5, \frac{23}{3}\}$.



3. Hier betrachten wir drei Fälle: I. $x < 3 < 8$, II. $3 \leq x < 8$, III. $3 < 8 \leq x$:

I. $x < 3 < 8 \Rightarrow |x - 3| = -(x - 3), |x - 8| = -(x - 8)$

$$-(x - 3) < -(x - 8)$$

$$x - 3 > x - 8$$

$$8 > 3 \quad (\text{wahr})$$

II. $3 \leq x < 8 \Rightarrow |x - 3| = x - 3, |x - 8| = -(x - 8)$

$$x - 3 < -(x - 8)$$

$$x - 3 < -x + 8$$

$$2x < 11$$

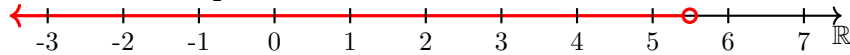
$$x < \frac{11}{2}$$

$$\text{III. } 3 < 8 \leq x \Rightarrow |x - 3| = x - 3, |x - 8| = x - 8$$

$$x - 3 < x - 8$$

$$-3 < -8 \quad (\text{falsch})$$

Die Lösungsmenge ist $x < \frac{11}{2}$.



4. Hier betrachten wir zwei Fälle: I. $x < -1$, II. $x \geq -1$.

$$\text{I. } x < -1 \Rightarrow |x + 1| = -(x + 1)$$

$$-(x + 1) = 2x$$

$$-x - 1 = 2x$$

$$3x = -1$$

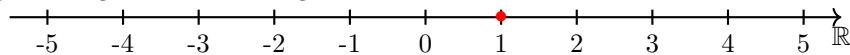
$$x = -\frac{1}{3} > -1 \quad (\text{Widerspruch})$$

$$\text{II. } x \geq -1 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$$

$$x + 1 = 2x$$

$$x = 1$$

Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $x = 1$.



Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$\bullet x = -3 \text{ oder } s = -\frac{7}{2}$$

$$\bullet x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ oder } x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ oder } x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet x = 1 - i\sqrt{3} \text{ oder } x = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\bullet x = m \text{ oder } x = \frac{2m}{m+3}, \text{ wenn } m \neq -3. \text{ Für } m = -3 \text{ gibt es nur eine Lösung } x = -3.$$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\bullet \frac{n+1}{2n}$$

$$\bullet \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\bullet \frac{n^2-9n+14}{6}$$

$$\bullet \frac{7(n+2)(n+3)}{2} - 7 = \frac{7n^2+35n+28}{2}$$

$$\bullet 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\bullet 0 \left(= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} \right)$$

$$\bullet \ln(n+1) \left(= \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \right) \right)$$

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Für $x = 0$, dann gilt: $|x - 0| + \dots + |x - 6| = 0 + 1 + 3 + 5 + 6 = 14 \neq 8$.

Für $x = 1$, dann gilt: $|x - 0| + \dots + |x - 6| = 1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 12 \neq 8$.

...

Aufgabe 6

[Infimum und Supremum]

1. Schreibe $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Da $n > 0$, ist $1 < 1 + \frac{1}{n}$ für alle $n = 1, 2, 3, \dots$.
Nehme an, dass es ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $1 + \varepsilon \leq 1 + \frac{1}{n}$ für alle n . Dann gilt $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$ für alle n . Wir können aber n_0 finden, sodass $n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Das heißt: $\frac{1}{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, ein Widerspruch. Also ist das Infimum 1.
Da $2 = 1 + \frac{1}{1} > 1 + \frac{1}{2} > \dots > 1 + \frac{1}{n}$ für alle $n = 3, 4, 5, \dots$, ist das Supremum (und das Maximum) dieser Menge 2.
 2. Die Lösungen der Gleichung $x^2 = x$ sind $x = 0, 1$. Die gegebene Ungleichung gilt für $0 \leq x \leq 1$ aber nicht für $x < 0$ oder $x > 1$, also ist diese Menge das Intervall $[0, 1]$. Das Infimum (und Minimum) ist 0 und das Supremum (und Maximum) ist 1.
 3. Die Lösungsmenge der Gleichung $\sin(x) = 0$ ist gegeben durch $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Da diese Menge weder von unten noch von oben beschränkt ist, besitzt sie kein Infimum und kein Supremum.
- [DIE INFORMATION ÜBER MAXIMA/MINIMA IST NICHT NOTWENDIG UM DIE VOLLE PUNKTENZAHL ZU BEKOMMEN]

Aufgabe 7

[Die Farbe der Pferde]

Obwohl diese Argumentation zuerst überzeugend klingt, ist sie natürlich falsch, denn es gibt Pferde mit verschiedenen Farben. Das gegebene Argument gilt nämlich nicht für $n = 2$. In diesem Fall ist es klar, dass alle Menge A, B mit $n - 1 = 1$ Pferden immer nur Pferde mit einer Farbe anhalten. Allerdings ist der Schnitt $A \cap B$ leer, also hat die Farbe des Pferdes in A nichts mit der Farbe des Pferdes in B zu tun. Der richtige Anfangspunkt wäre in diesem Fall $n = 2$, aber es stimmt nicht, dass alle zwei Pferde die gleiche Farbe haben, also können wir diesen Induktionsbeweis nicht durchführen.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 4

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Näherung von $\sqrt{a}$, 4+3+3 Punkte]

Sei $a > 0$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}.$$

Dabei ist $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so gewählt, dass $x_0^2 \geq a$.

1. Zeigen Sie, dass $x_n^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist und konvergiert.
3. Sei $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Zeigen Sie, dass $y^2 = a$, d.h. $y = \sqrt{a}$.

Hinweis zu 1.: Folgende Ungleichung könnte hilfreich sein (und muss begründet werden):

$$(1+t)^2 \geq 1+2t.$$

Aufgabe 2

[Sandwich-Lemma, 10 Punkte]

Es seien (a_n) , (b_n) und (c_n) Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie: Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert ℓ konvergieren, dann konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$.

Aufgabe 3

[Komposition und Konvergenz, 10 Punkte]

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$(\sqrt{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte, wobei $n \geq 1$ und $a > 1$:

- | | |
|---|---|
| • $\left(\frac{n!}{2^n}\right)$ | • $\left(\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 4}\right)$ |
| • $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ | • $\left(\frac{3n^3 - 2}{n^2 + 5n + 1}\right)$ |
| • $\left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k\right)$ | • $\left(\frac{n^4 - 2n^2 + 3}{3n^7 + 5n^3 + 1}\right)$ |
| • $\left(\frac{2 + (-1)^n}{n}\right)$ | • $\left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)$ |
| | • $(\sqrt[n]{a})$ |

2. Berechnen:

- | | |
|--|---|
| • Zeige $i^i \in \mathbb{R}$ mit $i^i \in [0, 1]$ | • Löse $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$ für $\theta \in]0, \pi[$ |
| • $\left \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right $ | • Drücke $\cos^3 x$ mit $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$ aus
<i>Hinweis:</i> $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ |
| • $\left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^{2025}$ | • Schreibe $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ als $re^{i\theta}$ mit $r \geq 0$
<i>Hinweis:</i> $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = \dots$ |
| • $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ für $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ | |

Abgabe: 12.11.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Gegeben sei eine reelle Folge (u_n) mit der Eigenschaft

$$u_{2n} < \frac{u_n}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir betrachten die Teilfolge $v_k = u_{2^k}$. Dann gilt

$$v_{k+1} = u_{2^{k+1}} < \frac{u_{2^k}}{2} = \frac{v_k}{2}.$$

Durch wiederholte Anwendung folgt induktiv

$$v_k < \frac{u_1}{2^k}.$$

Daraus ergibt sich $v_k \rightarrow 0$. Da $u_{2^k} \rightarrow 0$ und die Folge (u_n) zwischen diesen Indizes weiter abnimmt, folgt insgesamt

$$u_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

”

Das ist falsch. Erklären Sie mir warum.

Aufgabe 6

[Aus einer einfachen Ungleichung]

Für die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \in [0, 1]$ und $u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4}$ für alle $n \geq 1$, zeige $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$ wenn $n \rightarrow +\infty$.

Aufgabe 7

[Divergente oder konvergent?]

Finden Sie ein Beispiel für eine divergente Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \neq 1$, $(u_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist.

Aufgabe 8

[Log-konkav und unimodal]

Zeigen Sie, dass jede positive log-konkave Folge unimodal ist.

Log-konkav: $\forall k, \ln a_k \geq \frac{1}{2}(\ln a_{k-1} + \ln a_{k+1})$ oder $a_k^2 \geq a_{k-1} \cdot a_{k+1}$.

Unimodal: Eine Folge, die bis zu einem Maximum monoton wächst und anschließend monoton fällt.

Aufgabe 9

[Konvergenz fördern]

Sei $(u_n)_n$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie: Wenn $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ gegen $\ell > 0$ konvergiert, dann konvergiert auch $(\sqrt[n]{u_n})_n$ gegen ℓ . Untersuchen Sie die Umkehrung.

Zeigen Sie $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \rightarrow 4$ wenn $n \rightarrow +\infty$.

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 4

Aufgabe 1

[Näherung von $\sqrt{a}$]

1. Der Fall $n = 0$ erfolgt von der Annahme $x_0^2 \geq a$.
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}x_{n+1}^2 &= \left(x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}\right)^2 \\&= x_n^2 \left(1 - \frac{x_n^2 - a}{2x_n^2}\right)^2\end{aligned}$$

Wir wenden die im Hinweis angegebene Ungleichung (siehe Beweis unten) an und zwar mit $t = -\frac{x_n^2 - a}{2x_n^2}$:

$$\begin{aligned}x_{n+1}^2 &\geq x_n^2 \left(1 - 2 \cdot \frac{x_n^2 - a}{2x_n^2}\right) \\&= x_n^2 \left(1 - \frac{x_n^2 - a}{x_n^2}\right) \\&= x_n^2 - (x_n^2 - a) = a.\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Ungleichung gilt:

$$(1 + t)^2 = 1 + 2t + t^2 \geq 1 + 2t,$$

da $t^2 \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. (x_n) ist monoton fallend:

$$\begin{aligned}x_n - x_{n+1} &= x_n - \left(x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}\right) \\&= \frac{x_n^2 - a}{2x_n}\end{aligned}$$

Aus (a) folgt, dass $x_n^2 - a \geq 0$ für alle $n \geq 0$. Da auch $2x_n > 0$, gilt $x_n - x_{n+1} > 0$, also ist (x_n) monoton fallend.

Es gilt also $0 \leq x_n \leq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. (x_n) ist beschränkt. Weil es auch monoton fallend ist, muss (x_n) konvergieren.

3. Sei $y := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dann gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = y^2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}y &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}\right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 - a)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n)} \\&= y - \frac{y^2 - a}{2y} \\&\Rightarrow 0 = \frac{y^2 - a}{2y} \\&\Rightarrow y^2 = a\end{aligned}$$

Aufgabe 2

[Sandwich-Lemma]

Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Das heißt, dass für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ ist $|c_n - a_n| < \varepsilon$. Nach der Annahme, dass $a_n \leq c_n$, ist $|c_n - a_n| = c_n - a_n$, also erhalten wir $c_n \leq a_n + \varepsilon$. Daraus folgt, dass für alle $n \geq N$ ist

$$a_n \leq b_n \leq a_n + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |b_n - a_n| \leq \varepsilon,$$

also konvergiert die Folge $b_n - a_n$ gegen 0. Wir ziehen den Schluss, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 + a = a.$$

Aufgabe 3

[Komposition und Konvergenz]

Da (x_n) gegen a konvergiert, gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ ist $|x_n - a| < \varepsilon$. Wir wollen zeigen, dass für alle $\varepsilon' > 0$ existiert ein $N' \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N'$ ist $|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon'$. Da $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt auch $a \geq 0$. Wir betrachten zwei Fälle.

I. $a = 0$: Aus der Konvergenz von (x_n) existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ ist $|x_n| < \varepsilon$. Das heißt

$$\sqrt{x_n} = \sqrt{|x_n|} < \sqrt{\varepsilon}.$$

Für alle $\varepsilon' > 0$ schreibe also $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon'} > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ ist $|\sqrt{x_n}| < \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon'$. Daraus folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = 0 = \sqrt{0} = \sqrt{a}.$$

II. $a > 0$: Es gilt

$$\begin{aligned} (\sqrt{x_n} - \sqrt{a})(\sqrt{x_n} + \sqrt{a}) &= x_n - a \\ \Rightarrow |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| &= \left| \frac{x_n - a}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}}, \end{aligned}$$

da $\sqrt{x_n}, \sqrt{a} \geq 0$. Es gilt also

$$\sqrt{x_n} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}}.$$

Nehme nun $\varepsilon' > 0$ und schreibe $\varepsilon := \sqrt{a}\varepsilon'$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ ist

$$\begin{aligned} |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| &= \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \\ &\leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} \\ &< \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon', \end{aligned}$$

also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1. • $a_n := \left(\frac{n!}{2^n}\right)$ divergiert bestimmt, denn

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{2^n} \\ &= \frac{n(n-1)!}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{n}{2} \cdot a_{n-1}. \end{aligned}$$

Da $\frac{n}{2} > 1$ für alle $n > 2$, gilt $a_n > a_{n-1}$, also ist diese Folge monoton wachsend für $n > 2$. Das heißt $a_{n-1} \geq a_2$, also ist $a_n = \frac{n}{2} a_{n-1} \geq \frac{n}{2} a_2 = \frac{n}{4}$. Die Folge $\left(\frac{n}{4}\right)$ divergiert bestimmt, denn sie ist monoton wachsend und ist nicht nach oben beschränkt, also muss auch (a_n) bestimmt divergieren.

- $a_n := \left(\frac{n!}{n^n}\right)$ konvergiert gegen 0, denn

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Da jeder Term im Produkt positiv und höchstens 1 ist, gilt $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$ für alle $n > 0$. Die Nullfolge und die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergieren beide gegen 0, also konvergiert auch (a_n) gegen 0 nach dem Sandwich-Lemma (Aufgabe 1).

- $a_n := \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k\right)$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, denn

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Da $\left(\frac{1}{2n}\right)$ gegen 0 konvergiert, konvergiert (a_n) gegen $\frac{1}{2}$.

- $a_n := \left(\frac{2 + (-1)^n}{n}\right)$ konvergiert gegen 0, denn für alle $n > 0$ gilt $0 < 2 + (-1)^n < 4$. Das heißt

$$0 < \frac{2 + (-1)^n}{n} < \frac{4}{n}.$$

Da die Nullfolge und die Folge $\left(\frac{4}{n}\right)$ gegen 0 konvergieren, konvergiert auch (a_n) gegen 0 nach dem Sandwich-Lemma.

- $a_n := \left(\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 4}\right)$ konvergiert gegen $\frac{1}{3}$, denn

$$\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 4} = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}.$$

Da $\frac{-1}{n}$, $\frac{2}{n^2}$, $\frac{2}{n}$ und $\frac{4}{n^2}$ alle gegen 0 konvergieren, folgt, dass $\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$ gegen 1 und $\left(3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)$ gegen 3 konvergieren.

Da $3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} > 0$ für alle $n > 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} = 3 > 0$, folgt, dass $\frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}} = (a_n)$ gegen $\frac{1}{3}$ konvergiert.

- $a_n := \left(\frac{3n^3 - 2}{n^2 + 5n + 1}\right)$ divergiert bestimmt. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Folge $b_n := \frac{3n^2 - \frac{2}{n}}{n^2 + 5n + 1}$ für $n \geq 1$, also ist $n \cdot b_n = a_n$ und somit folgt, dass $n = \frac{a_n}{b_n}$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - \frac{2}{n}}{n^2 + 5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Da $b_n > 0$ für alle $n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 > 0$, würde dann gelten, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{3},$$

aber die Folge (n) divergiert bestimmt, also muss auch (a_n) divergieren.

- $a_n := \left(\frac{n^4 - 2n^2 + 3}{3n^7 + 5n^3 + 1} \right)$ konvergiert gegen 0, denn

$$\frac{n^4 - 2n^2 + 3}{3n^7 + 5n^3 + 1} = \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^7}}{3 + \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^7}}.$$

Da $3 + \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^7} > 0$ für alle $n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^7} = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^7} = 0$, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{0}{3} = 0$.

- $a_n := \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n \right)$ konvergiert gegen $\frac{3}{2}$, denn wir können schreiben

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n \right) \left(\sqrt{n^2 + 3n} + n \right) &= \left(\sqrt{n^2 + 3n} \right)^2 - n^2 = n^2 + 3n - n^2 = 3n \\ \Rightarrow \sqrt{n^2 + 3n} - n &= \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Der Nenner konvergiert nicht gegen 0 und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{2}.$$

- $a_n := (\sqrt[n]{a})$ konvergiert gegen 1. Um dies zu beweisen, müssen wir zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ ist $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$. Da für $a > 1$ ist auch $\sqrt[n]{a} > 1$, gilt die untere Schranke für alle $\varepsilon \geq 0$. Für die obere Schranke benutzen wir den binomischen Lehrsatz:

$$(1 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k = 1 + n\varepsilon + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k > 1 + n\varepsilon,$$

also für $n \geq \frac{a-1}{\varepsilon} + 1 =: N$ gilt

$$(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon \geq a + \varepsilon > a \quad \Rightarrow \quad 1 + \varepsilon > \sqrt[n]{a}.$$

Bemerkung: Wir können nicht einfach sagen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$. In diesem Fall stimmt das, aber nur, weil die Funktion $g(x) = a^x$ stetig in 0 ist für alle $a \neq 0$. Als Gegenbeispiel nehme $a = 0$. Dann gilt

$$0^x = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das heißt $0^{\frac{1}{n}} = 0$ für alle $n \geq 1$, also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0^{\frac{1}{n}} = 0 \neq 1 = 0^0 = 0^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}.$$

- $i^i = (e^{i \frac{\pi}{2}})^i = e^{i \cdot i \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$, mit $-\frac{\pi}{2} < 0$, so $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} < e^0 = 1$, und $i^i = e^{\text{etwas}}$, so $i^i > 0$.
 - $\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, so $\left| \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1^2 + 1^2} = 1$

- $\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, so $\left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^{2025} = e^{i\frac{2025\pi}{4}} = e^{i506\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$
- $1 + \omega + \dots + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0$ weil $\omega^5 = e^{i\frac{2\pi}{5} \cdot 5} = 1$
- $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta < 0$, so $z = \frac{1}{2}(2\cos\theta \pm \sqrt{\Delta}) = \cos\theta \pm i\sin\theta$ So, $z = \cos\theta + i\sin\theta = 2e^{i\theta}$ oder $z = \cos\theta - i\sin\theta = 2e^{-i\theta}$
- $\cos x = \Re(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, so $\cos^3 x = \frac{1}{2^3}(e^{ix} + e^{-ix})^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{(2-1)ix} + 3e^{(1-2)ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$
- $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} = 1 + e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}(e^{-i\frac{5\pi}{12}} + e^{i\frac{5\pi}{12}}) = 2\cos\frac{5\pi}{12}e^{i\frac{5\pi}{12}}$, mit $2\cos\frac{5\pi}{12} > 0$

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Es gibt zwei Probleme:

- $(u_n)_n$ ist **relle**, nicht unbedingt positiv! Für $u_n = -n^2$, dann gilt: $u_{2n} = -4n^2 < -\frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}u_n$. Allerdings hat man $u_n \rightarrow -\infty$.
- “zwischen diesen Indizes weiter abnimmt” ist falsch. Selbst wenn man annimmt, dass $u_n \geq 0$, man kann bauen: $u_{2n+1} = 2n+1$ für alle n , und $u_{2n} = \frac{1}{4}u_n$. Diese Folge erfüllt die festgelegte Bedingung, aber wir haben: $u_n \not\rightarrow 0$.

Aufgabe 6

[Aus einer einfachen Ungleichung]

Konvergiert $(u_n)_n$ gegen ℓ , dann gilt $\ell(1-\ell) \geq \frac{1}{4}$ und $\ell \in [0, 1]$. Erhalten wir durch Analyse des Polynoms $x \mapsto (1-x)x$, dass für alle $x \in [0, 1]$, dann gilt $(1-x)x \leq \frac{1}{4}$ mit Gleichung für $x = \frac{1}{2}$. So $\ell = \frac{1}{2}$.

Es bleibt noch die Konvergenz zu beweisen. Wir wissen, dass $(u_n)_n$ unter 0 beschränkt ist. Außerdem: $u_n(1-u_n) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - u_n)^2 \leq \frac{1}{4} < u_{n+1}(1-u_n)$.

Da $1-u_n \geq 0$, dann gilt $u_n < u_{n+1}$, so $(u_n)_n$ zunimmt. So $(u_n)_n$ zunimmt und unter 0 beschränkt ist: $(u_n)_n$ konvergiert.

Aufgabe 7

[Divergente oder konvergent?]

Wir definieren die Folge $(u_n)_n$ durch $u_n = 0$, wenn n keine Primzahl ist, und $u_p = 1$ für alle Primzahlen p . In diesem Fall ist $(u_{kn})_n$ Null für $n \geq 2$, also $\forall k \geq 1, u_{kn} \rightarrow 0$. $(u_n)_n$ kann jedoch nicht konvergieren, da es eine extrahierte Folge $(u_p)_p$ Primzahl hat, die gegen 1 strebt.

Aufgabe 8

[Log-konkav und unimodal]

Wenn $(a_k)_k$ nicht unimodal ist, dann hat es ein lokales Minimum, sagen wir bei r : $a_{r-1} > a_r \leq a_{r+1}$, wobei $a_{r-1} \geq a_r > a_{r+1}$. Daher ist $a_r^2 < a_{r-1}a_{r+1}$, also ist $(a_k)_k$ nicht log-konkav.

Aufgabe 9

[Konvergenz fördern]

Sei $\varepsilon > 0$ und N so, dass $\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$. Dann folgt per Produkt: $u_N(\ell - \varepsilon)^{n-N} \leq u_n \leq u_N(\ell + \varepsilon)^{n-N}$. Übergehend zu $\sqrt[n]{\dots}$ erhalten wir:

$$u_N^{1/n}(\ell - \varepsilon)^{1-N/n} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq u_N^{1/n}(\ell + \varepsilon)^{1-N/n}$$

Durch Einrahmen und Grenzübergang erhalten wir die Existenz eines $\overline{N}$, so dass $\forall n \geq \overline{N}, \ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon$. Somit ist $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$ wenn $n \rightarrow +\infty$.

Die Umkehrung ist falsch. Wir können beispielsweise die folgende Folge erstellen: Wir nehmen a, b , zwei verschiedene positive reelle Zahlen, $u_0 = 1$ und:

$$u_{n+1} = \begin{cases} a \cdot u_n & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \\ b \cdot u_n & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \end{cases}$$

Dann gilt $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ nicht konvergiert, aber $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \sqrt{ab}$ wenn $n \rightarrow +\infty$.

Für $u_n = \binom{2n}{n}$, haben wir $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+2}{n+1} \rightarrow 4$, so $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \rightarrow 4$ wenn $n \rightarrow +\infty$.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 5

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Unweit $\frac{1}{k^2}$, 10 Punkte]

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Hinweis: Die Beweisstrategie für die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ könnte nützlich sein.

Aufgabe 2

[Sierpinski-Teppich, 5+5 Punkte]

Wir führen folgende rekursive Konstruktion durch: Sei

$$T_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1\}$$

das im Nullpunkt zentrierte Quadrat mit Seitenlänge 2. Wir unterteilen T_0 in 9 gleichgroße Quadrate $Q_1^1, \dots, Q_1^9$, wobei Q_1^9 das mittlere Quadrat bezeichne. Wir erhalten T_1 aus T_0 , indem wir Q_1^9 entfernen:

$$T_1 = \bigcup_{k=1}^8 Q_1^k.$$

Allgemein erhalten wir für $n \geq 1$ T_{n+1} aus T_n , indem wir die Quadrate Q_n^k , aus denen T_n zusammengesetzt ist, in jeweils 9 gleichgroße Quadrate zerlegen, von denen wir das Mittlere entfernen. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne F_n die Fläche von T_n und U_n die Länge des Randes (also die „Begrenzungslinien“) von T_n .

1. Konvergiert die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Wenn ja, gegen welchen Wert?

2. Konvergiert die Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Wenn ja, gegen welchen Wert?

Bitte begründen Sie Ihre Antworten schlüssig und nachvollziehbar.

Aufgabe 3

[abelsche partielle Summation, 5+5 Punkte]

Betrachten Sie zwei Familien komplexer Zahlen $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$. Wir definieren $A_n = \sum_{j=0}^n a_j$ und $b_j = B_{j+1} - B_j$. Zeigen Sie, dass:

$$\sum_{j=0}^n a_j B_j = A_n B_n - \sum_{j=0}^{n-1} A_j b_j$$

Bestimmen Sie $\sum_{k=0}^n k 2^k$.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Untersuchen Sie auf Konvergenz wenn $n \rightarrow +\infty$ (**2 Punkte für jede Reihe**) (Für die Beantwortung dieser Frage müssen Sie den Kurs belegt haben).

$$\bullet \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{k^2}{k^3 + 1}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n \frac{5^k}{k!}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^7}{k^8}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{k}}$$

2. Berechnen (Für diese Frage dürfen Sie Ihr gesamtes Vorwissen verwenden, einschließlich des Wissens aus der Schulzeit sowie des Wissens, das Sie auf dieser Wikipedia-Seite finden: https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie):

$$\bullet \tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$$

$$\bullet \text{ Vereinfache } \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} \text{ für } x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\bullet \cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{2\pi}{3}$$

$$\bullet \text{ Löse } 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \text{ für } x \in [-\pi, +\pi]$$

$$\bullet \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-\pi + x)$$

$$\bullet \cos \frac{\pi}{8} \text{ und } \sin \frac{\pi}{8} \text{ (mit } 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \dots)$$

$$\bullet \cos \frac{5\pi}{12} \text{ und } \sin \frac{5\pi}{12} \text{ (mit } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \dots)$$

$$\bullet \text{ Löse } |\tan x| \leq 1 \text{ für } x \in [-\pi, +\pi]$$

Abgabe: 19.11.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Aufgabe: Finde zwei positive Folgen (a_n) und (b_n) , so dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

konvergiert, aber die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

divergiert.

Lösung: Wir wählen die beiden Folgen so, dass sie nur auf dünnen Teilmengen „größere“ Werte annehmen, damit ihre eigenen Reihen konvergieren, sich ihre großen Terme aber bei der Multiplikation überlappen und die Produktreihe divergiert.

Definiere:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{falls } n = k^2, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{falls } n = k^2 + 1, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

- Die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergieren, da die Terme $1/\sqrt{n}$ nur an quadratischen (bzw. fast quadratischen) Indizes auftreten.
- Die Produktreihe $\sum a_n b_n$ divergiert, da für $n = k^2 + 1$ gilt:

$$a_{k^2+1} b_{k^2+1} \approx \frac{1}{k},$$

und somit $\sum a_n b_n \sim \sum \frac{1}{k}$ divergiert.

Endergebnis:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & n = k^2, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & n = k^2 + 1, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 6

[Dezimalentwicklung]

Beweisen Sie: Eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ ist rational, falls die Dezimalentwicklung von q periodisch ist.

Aufgabe 7

[Doppelindex]

Berechnen:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} j, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} j, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} i, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij, \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j}$$

Aufgabe 8

[Wenn eine Konvergenz eine andere verdeckt]

1. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Beweisen Sie: Falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q$ für ein $q < 1$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.
2. Für welche $a \geq 0$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9

[Reihe von Polynomen]

Berechne den Grenzwert von (wenn $n \rightarrow +\infty$):

$$\frac{1}{n^5} \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$$

Wir beginnen mit der Ermittlung von $\sum_{k=1}^n k^4$ mithilfe einer Teleskopsumme und dem Polynom $P(x) = \frac{1}{30}x(x-1)(6x^3 - 9x^2 + x + 1)$: berechnen $P(k+1) - P(k)$.

Aufgabe 10

[Schecke von Gardner]

Eine Schnecke sitzt am Ende eines 100 m langen, vollkommen elastischen Seils. Sie möchte das andere Ende erreichen. Sie bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 1 m/h. Zu Beginn jeder Stunde zieht ein Riese am Seil, wodurch es sich elastisch dehnt. Jedes Mal dehnt sich das Seil gleichmäßig um 100 m. Wird die Schnecke ihr Ziel erreichen?

Aufgabe 11

[Sylvester-Folge]

Wir definieren die Folge der ganzen Zahlen $(s_n)_n$ mit $s_0 = 2$ und $s_n = 1 + \prod_{k=0}^{n-1} s_k$. Zeigen Sie, dass $s_n \rightarrow +\infty$. Zeigen Sie, dass die Reihe mit dem allgemeinen Term $1/s_n$ konvergiert und berechnen Sie ihre Summe ($= 1$).

Zeigen Sie, dass die Summe der ersten k Terme der Folge $\left(\frac{1}{s_n}\right)_n$ die bestmögliche Standardnäherung von 1 unter Verwendung von k ägyptischen Brüchen (positiver Bruch mit einem Zähler gleich 1) darstellt und dass eine Summe ägyptischer Brüche mindestens fünf Terme haben muss, um eine beliebige Zahl in $\left]\frac{1805}{1806}, 1\right[$, darzustellen.

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 5

Aufgabe 1

[Unweit $\frac{1}{k^2}$]

Da $4n^2 - 1 = (2n + 1)(2n - 1)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{4n^2 - 1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n + 1) - (2n - 1)}{(2n + 1)(2n - 1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right].\end{aligned}$$

Also folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right].$$

Wir schreiben die ersten N Terme dieser Summe auf:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right] &= \left(\frac{1}{2(1) - 1} - \frac{1}{2(1) + 1} \right) + \left(\frac{1}{2(2) - 1} - \frac{1}{2(2) + 1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N - 1} - \frac{1}{2N + 1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N - 1} - \frac{1}{2N + 1} \right) \\ &= \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \right) + \cdots - \frac{1}{2N + 1} \\ &= 1 - \frac{1}{2N + 1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2N + 1} \right) = 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2

[Sierpinski-Teppich]

1. Die Folge F_n ist beschränkt ($0 \leq F_n \leq 4$) und monoton fallend für alle $n \in \mathbb{N}$, denn mit jedem Schritt ein Teil der übrigen Fläche entfernt wird, also konvergiert F_n .
Nach dem n -ten Schritt gibt es 8^n Quadrate jeweils mit Fläche $\frac{1}{9^n} \cdot 4$, also gilt $F_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot 4$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9} \right)^n \cdot 4 = 0.$$

2. Von T_n zu T_{n+1} werden 8^n Quadrate mit Umfang $4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \cdot 2 = \frac{8}{3^{n+1}}$ entfernt, also gilt

$$U_{n+1} = U_n + \left(\frac{8}{3} \right)^{n+1}$$

Darüber hinaus gilt $U_0 = 8$, also ist für alle $n \geq 1$:

$$U_n = 8 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{8}{3} \right)^k.$$

Das heißt, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{8}{3} > 1$, also konvergiert U_n nicht.

Aufgabe 3

[abelsche partielle Summation]

Mit $A_{-1} = 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n a_k B_k &= \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) B_k \\
&= \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} B_k \\
&= \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\
&= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k
\end{aligned}$$

Für $a_k = 2^k$ und $B_k = k$, dann gilt $A_n = 2^{n+1} - 1$ und $b_n = 1$, so:

$$\sum_{k=0}^n k 2^k = (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) = n 2^{n+1} - n - 2(2^n - 1) = 2^{n+1}(n - 1) + 2$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1. (a) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \frac{k^2}{k^3 + 1}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, denn

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{k^2}{k^3 + 1} = \frac{1}{k + \frac{1}{k^2}} \\
k \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq 1 \\
\Rightarrow k + \frac{1}{k^2} &\leq k + 1 < k + 1 + \frac{1}{(k+1)^2} \\
\Rightarrow a_k &= \frac{1}{k + \frac{1}{k^2}} > \frac{1}{(k+1) + \frac{1}{(k+1)^2}} = a_{k+1},
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k^3 + 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k + \frac{1}{k^2}} = 0.$$

Aus dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert.

- (b) Wir schreiben

$$\begin{aligned}
a_k &:= \frac{(k-1)^7}{k^8} = \frac{k^7 - 7k^6 + 21k^5 - 35k^4 + 35k^3 - 21k^2 + 7k - 1}{k^8} \\
&= \frac{1}{k} - \frac{7}{k^2} + \frac{21}{k^3} - \frac{35}{k^4} + \frac{35}{k^5} - \frac{21}{k^6} + \frac{7}{k^7} - \frac{1}{k^8}.
\end{aligned}$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, so konvergieren auch die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^i}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und Potenzen $i \geq 2$, weil $\frac{1}{k^2}$ eine Majorante für $\frac{1}{k^i}$, $i > 2$, ist. Das heißt,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad b_k := -\frac{7}{k^2} + \frac{21}{k^3} - \frac{35}{k^4} + \frac{35}{k^5} - \frac{21}{k^6} + \frac{7}{k^7} - \frac{1}{k^8}$$

konvergiert. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergieren würde, würde auch $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergieren, was aber nicht der Fall ist. Also divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

- (c) Schreibe $a_k = \frac{5^k}{k!}$, dann gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5^{k+1}}{\frac{(k+1)!}{5^k}} = \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{5^k} = \frac{5}{k+1}.$$

Setze $k_0 = 5$, so ist $\frac{5}{k+1} \leq \frac{5}{6} < 1$ für alle $k \geq k_0$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert also diese Reihe.

(d) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $(-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$, also ist diese Reihe äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Darüber hinaus gilt $\sqrt{k} \leq k$, also ist $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. Das heißt, $\frac{1}{k}$ ist eine Minorante für $\frac{1}{\sqrt{k}}$ und da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch diese Reihe.

- 2.
- $-1 - \sqrt{3}$
 - $-\frac{1}{2}$
 - 0
 - $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, so $\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$ und $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1$. Es folgt $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Also $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ und $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
 - $\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
 $\cos \frac{5\pi}{12} = -\cos \frac{5\pi}{12} = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.
 - $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$
 - Verwenden Sie $X = \sin x$, um ein Polynom zweiten Grades zu erhalten, und lösen Sie es. Man erhält: $2\sin^2 x + \sin x - 1 = (2\sin x - 1)(\sin x + 1)$, so $\sin x = -1$ oder $\sin x = \frac{1}{2}$. Es folgt $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
 - $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x \in \left\{\pm\frac{\pi}{4}, \mp\frac{3\pi}{4}\right\}$. Da $\tan$ eine zunehmende Funktion auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, dann gilt: $|\tan x| \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

$\sum_k a_{k^2} = \sum_k \frac{1}{k}$ divergiert... So divergiert auch $\sum_k (a_k + b_k)$ und ist nicht konvergent.

Aufgabe 6

[Dezimalentwicklung]

Nehme an, dass die Ziffern von q sich ab dem m -ten Platz nach dem Komma wiederholen ($m \geq 1$) und schreiben n für die Länge der Periode der wiederholenden Ziffern in der Dezimalentwicklung. Das heißt,

$$q \cdot 10^{m-1} = C + 0, \overline{q_1 q_2 \dots q_n},$$

wobei $C \in \mathbb{Z}$ und q_i sind die wiederholenden Ziffern der Dezimalentwicklung. Wir schreiben $D := q_1 q_2 \dots q_n$ für die ganze Zahl mit den Ziffern $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Setze $q' := q \cdot 10^{m-1} - C$. Dann ist q genau dann rational, wenn q' rational ist. Es gilt

$$\begin{aligned} q' &= \frac{D}{10^n} + \frac{D}{10^{2n}} + \frac{D}{10^{3n}} + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D}{10^{kn}} \\ &= D \sum_{k=1}^{\infty} (10^{-n})^k, \end{aligned}$$

was eine geometrische Reihe ist. Da $|10^{-n}| < 1$, konvergiert diese Reihe und zwar gegen

$$\begin{aligned} q' &= D \sum_{k=1}^{\infty} (10^{-n})^k \\ &= -D + D \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-n})^k \\ &= -D + \frac{D}{1 - 10^{-n}} \\ &= -D + \frac{D \cdot 10^n}{10^n - 1} \\ &= \frac{D}{10^n - 1}, \end{aligned}$$

was rational ist, also ist auch $q = (q' + C) \cdot 10^{1-m}$ rational.

Aufgabe 7

[Doppelindex]

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n j \right) = n \cdot \left(\sum_{j=1}^n j \right) = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} j = \sum_{j=1}^n \left(j \cdot \sum_{i=1}^{j-1} 1 \right) = \sum_{j=1}^n j(j-1) = \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} j = \sum_{i=1}^{n-1} \left(i \cdot \sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i+1) = (n+1) \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = (n+1) \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+4)}{6}$$

Dann gilt $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$, so

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij - \sum_{1 \leq i=j \leq n} ij \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \sum_{i=1}^n i^2 \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+\frac{2}{3})}{8}$$

$$2 \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{j}{i+j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i+j}{i+j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 = n^2$$

$$\text{So } \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j} = \frac{n^2}{2}.$$

Aufgabe 8

[Wenn eine Konvergenz eine andere verdeckt]

1. Dieser Satz ist das sogenannte Wurzelkriterium. Die Hauptidee im Beweis ist, dass man eine konvergente geometrische Reihe (mit Summanden kleiner 1) als Majorante für die gegebene Reihe sucht und zwar anhand des Grenzwerts q .

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q$ für ein $q < 1$. Dann existiert für $\varepsilon := \frac{1-q}{2} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sqrt[k]{|a_k|} < q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} < 1$$

für alle $k \geq N$. Es folgt, dass $|a_k| < \left(\frac{q+1}{2}\right)^k$, also ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^k$$

eine Majorante für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Die geometrische Reihe konvergiert ($\left|\frac{q+1}{2}\right| < 1$), also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

2. Wir schreiben $a_k = \left(a + \frac{1}{k}\right)^k$.

Für $a \geq 1$ ist $\left(a + \frac{1}{k}\right) > 1$ für alle $k \geq 1$, also ist die Folge $\left(a + \frac{1}{k}\right)^k$ keine Nullfolge. Somit kann die Reihe nicht konvergieren.

Für $0 \leq a < 1$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \left(a + \frac{1}{k}\right)^k \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| a + \frac{1}{k} \right| = a < 1.$$

Nach Teil a konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Aufgabe 9

[Reihe von Polynomen]

Dann gilt $P(x+1) - P(x) = \dots = x^4$, so $\sum_{k=0}^n = P(n+1) - P(0) = P(n+1)$. Es folgt:

$$n^5 u_n = \sum_{k,h=0}^n (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4) = 10 \sum_{k,h} h^4 - 18 \sum_{k,h} h^2k^2 = 10nP(n+1) - 18 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2$$

Das ist ein Polynom vom Grad 6, aber: $n^5 u_n = \left(10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{30} - 18 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{6^2}\right) n^6 + \left(\frac{15}{3} - \frac{12}{2}\right) n^5 + \dots n^4 + \dots n^3 + \dots n^2 + \dots n + \dots 1 = 0n^6 - n^5 + \dots$. So $u_n = -1 + \dots \frac{1}{n} + \dots \frac{1}{n^2} + \dots \frac{1}{n^3} + \dots \frac{1}{n^4} + \dots \frac{1}{n^5} \rightarrow -1$ wenn $n \rightarrow +\infty$.

Aufgabe 10

[Schecke von Gardner]

https://en.wikipedia.org/wiki/Ant_on_a_rubber_rope

Aufgabe 11

[Sylvester-Folge]

Wir beachten, dass $(s_n)_n$ eine streng zunehmende Folge ganzer Zahlen ist und daher gegen $+\infty$ tendiert (sie ist größer als $(n)_n$). Dann gilt: $s_{n+1} - 1 = \prod_k s_k = s_n(s_n - 1)$, daher steigt sie schneller als $n!$: Zunächst folgt $s_n - 1 \geq n$ durch unmittelbare Induktion, also $s_{n+1} \geq n \cdot s_n$, und somit $s_n \geq n!$ durch Induktion. Daraus folgt, dass die Reihe mit dem allgemeinen Term $\frac{1}{s_n}$ konvergiert (und zwar gegen kleiner als e).

Außerdem:

$$\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} = \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_n(s_n - 1)} = \frac{1}{s_n}$$

So

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{s_k} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} \right) = \frac{1}{s_0 - 1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_{n+1} - 1} = 1$$

Wir zeigen per Induktion, dass $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{s_j}$ die beste Näherung von 1 durch k ägyptische Brüche ist. Diese Tatsache ist für $k=1$ verifiziert, da es keinen Einheitsbruch gibt, der näher an 1 liegt als $\frac{1}{2}$. Damit ist s_k gleich $m = \min\{n \in \mathbb{N}; \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{s_j} + \frac{1}{n} < 1\}$. Nun wissen wir, wie man $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{s_j}$ durch Teleskopieren berechnet: $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{s_j} = 1 - \frac{1}{s_k - 1}$. Daraus folgt, dass $\frac{1}{m} < \frac{1}{s_k - 1}$, also $m > s_k - 1$ und $s_k = m$ durch Minimalität.

Schließlich berechnen wir, dass $s_0 = 2$, $s_1 = 3$, $s_2 = 7$, $s_3 = 43$ und $s_4 = 1807$ ist. Daher: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = \frac{1}{1807-1} = \frac{1}{1806}$. Da dies die beste Standardnäherung von 1 durch 4 ägyptische Brüche ist, kann eine Zahl im Verhältnis $]1 - \frac{1}{1806}, 1[$ nicht als Summe von 4 ägyptischen Brüchen oder weniger geschrieben werden, da dies eine bessere Standardnäherung von 1 ergeben würde.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025
Übungsblatt 6

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Funktionalgleichung, 2+2+2+2+2 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

erfüllt. Zeigen Sie

1. $f(0) = 0$ und $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x - y) = f(x) - f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, x \in \mathbb{R}$, und sogar $f(qx) = qf(x)$ für alle $q \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$.
4. Ist f stetig in 0, so ist f stetig auf $\mathbb{R}$.
5. Ist f stetig, so ist schon $f : x \mapsto ax$ mit $a := f(1)$.

Aufgabe 2

[Dichotomie, 10 Punkte]

Sei $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Bestimmen Sie ein Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $|\beta - \alpha| < \frac{1}{200}$ mittels der Intervallhalbierung aus dem Beweis des Zwischenwertsatzes, sodass ein $x_0 \in [\alpha, \beta]$ existiert mit

$$p(x_0) = 0.$$

Aufgabe 3

[Fixpunkt in einem Quadrat, 10 Punkte]

Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. es existiert ein $y \in [a, b]$ mit

$$f(y) = y.$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder falsch? Muss mit einer Zeichnung begründet werden, ohne Wort (außer “wahr”/“falsch”).

- Das Bild eines offenen Intervalls durch eine stetige Funktion ist ein offenes Intervall.
- Das Bild eines geschlossenen und beschränkten Intervalls durch eine stetige Funktion ist ein geschlossenes und beschränktes Intervall.
- Das Bild einer beschränkten Teilmenge durch eine stetige Funktion ist eine beschränkte Teilmenge.
- Das inverse Bild eines Intervalls durch eine stetige Funktion ist ein Intervall.
- Jede stetige und zunehmende Funktion auf $\mathbb{R}$ hat einen Fixpunkt.
- Wenn f stetig ist und auf $[0, +\infty]$ mit $f(0) = 0$ zunimmt und g stetig ist und auf $[0, +\infty]$ mit $g(0) = 1$ abnimmt, dann existiert $x > 0$, sodass $f(x) = g(x)$.

2. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (benutzen sie insbesondere die Definition der Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$ durch Folgen $x_n \rightarrow x_0$ und die Definition von $e^x := \exp(x) := \dots$):

- $\frac{e^x}{x}$ wenn $x \rightarrow +\infty$
- $x e^x$ wenn $x \rightarrow -\infty$
- $3e^{2x} - 2e^{3x}$ wenn $x \rightarrow +\infty$
- $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ wenn $x \rightarrow +\infty$
- $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ wenn $x \rightarrow -\infty$
- $x^2 e^{-\sqrt{x}}$ wenn $x \rightarrow +\infty$
- $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ wenn $x \rightarrow +\infty$

Abgabe: 26.11.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

„

Behauptung: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine monoton fallende Funktion. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = x_0$.

Beweis: Definiere $g(x) := f(x) - x$. Da f fallend ist, ist g ebenfalls fallend.

Betrachte nun die Werte an den Rändern $[0, 1]$:

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Da g fallend ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz (bzw. aus der Monotonie), dass es ein $x_0 \in [0, 1]$ gibt mit

$$g(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = x_0.$$

□

„

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum (das ist unauffällig).

Aufgabe 6

[Warh oder nicht?]

Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Für alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ ist die Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $p(x) = x^3 - 3x + 1$ stetig auf I , nimmt also sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum auf I an.
2. Die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig. Es gilt $g(-1) = -1$ und $g(1) = 1$, also es existiert ein $x_0 \in [-1, 1]$ mit $g(x_0) = 0$.
3. Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig und definiere $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ als die n -fache Verkettung von f . Angenommen, dass für ein $x \in [0, 1]$ die Folge $(f^n(x))_n$ gegen ein y konvergiert. Dann ist y bereits ein Fixpunkt von f .

Aufgabe 7

[Stetig oder nicht?]

1. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax & \text{für } x \leq 1 \\ a^2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig?

2. In welchen Punkten ist die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig?

Hinweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ (das wissen wir aus der Vorlesung) und $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ (das haben wir zwar in der Vorlesung nicht gezeigt, aber Sie dürfen das ohne Weiteres benutzen).

Aufgabe 8

[Asymptotisch ub-lineare Funktionen]

Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige, wachsende Funktion mit

$$\frac{f(x)}{x} \longrightarrow k < 1 \quad \text{wenn } x \rightarrow +\infty.$$

Zeigen Sie dass die Folge $(u_n)_n$ mit $u_{n+1} = f(u_n)$ konvergiert wenn $u_1 \neq u_0$ (das Wachstum der Folge je nachdem untersuchen, ob $u_0 < u_1$ oder $u_0 > u_1$).

Daraus folgt, dass die Funktion f einen Fixpunkt besitzt (d.h. eine reelle Zahl ℓ , sodass $f(\ell) = \ell$ gilt).

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 6

Aufgabe 1

[Funktionalgleichung]

1. Es gilt $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, also ist $f(0) = 0$.
Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}$: $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, also ist $f(-x) = -f(x)$.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) + (-f(y)) = f(x) - f(y)$$

aus a.

3. Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}}_{n \text{ mal}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{x}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{x}{n}\right)}_{n \text{ mal}} = nf\left(\frac{x}{n}\right) \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{n}f(x) &= f\left(\frac{1}{n}x\right). \end{aligned}$$

Sei $q \in \mathbb{Q}$ nicht negativ. Es existieren $p, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, sodass $q = \frac{p}{n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(qx) &= f\left(\frac{p}{n}x\right) = f\left(\frac{1}{n}px\right) = \frac{1}{n}f(px) \quad (\text{aus dem ersten Teil}) \\ &= \frac{1}{n}f\left(\underbrace{x + \dots + x}_{p \text{ mal}}\right) = \frac{1}{n}\underbrace{[f(x) + \dots + f(x)]}_{p \text{ mal}} = \frac{1}{n}(pf(x)) = \frac{p}{n}f(x) = qf(x). \end{aligned}$$

Für $q < 0$ folgt $f(q) = -f(-q)$ aus a, also gilt die Aussage für alle $q \in \mathbb{Q}$.

4. Ist f in 0 stetig, so gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(0)| < \varepsilon.$$

Wir wollen zeigen, dass Folgendes für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Wir wissen, dass $f(x) - f(y) = f(x - y)$, also setzen wir $z := x - y$ in die Definition von der Stetigkeit von f in 0 ein und ziehen damit den Schluss, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

5. Für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt nach c

$$f(q) = f(q \cdot 1) = qf(1),$$

also müssen wir die Aussage nur noch für alle $x \in \mathbb{R}$ beweisen.

Weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, existiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Folge von rationalen Zahlen (a_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. Wenn f stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(1) \\ &= f(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= xf(1), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 2

[Dichotomie]

Nach dem Beweis des Zwischenwertsatzes setzten wir $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$. Es gilt $p(0) > 0$ und

$p(1) < 0$. Bei jedem Schnritt interessieren wir uns jeweils dafür, ob das Polynom evaluiert im Mittelpunkt $m := \frac{a_n+b_n}{2}$ positiv oder negativ ist:

n	a_n	b_n	$m = \frac{a_n+b_n}{2}$	$p(m)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	< 0
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	> 0
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	< 0
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	> 0
4	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{32}$	> 0
5	$\frac{11}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{23}{64}$	< 0
6	$\frac{11}{32}$	$\frac{23}{64}$	$\frac{45}{128}$	< 0
7	$\frac{11}{32}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{89}{256}$	< 0

Daraus ziehen wir den Schluß, dass es einen Nullpunkt im Intervall $[\frac{11}{32}, \frac{89}{256}]$ gibt, und $|\frac{89}{256} - \frac{11}{32}| = \frac{1}{256} < \frac{1}{200}$.

Aufgabe 3

[Fixpunkt in einem Quadrat]

Ein Punkt $y \in [a, b]$ ist ein Fixpunkt von f wenn $f(y) = y$, also $f(y) - y = 0$. Wir schauen die Funktion

$$f(x) - x : [a, b] \rightarrow [a - b, b - a]$$

an und zeigen, dass sie einen Nullpunkt hat.

Erstens gilt, dass $f(x) - x$ stetig auf $[a, b]$ ist, denn $f(x)$ und $g(x) := x$ stetig sind (Satz 6.8).

Nun schauen wir $f(a) - a$ und $f(b) - b$ an. Da $f(a), f(b) \in [a, b]$ sind, gilt

$$\begin{aligned} f(a) - a &\geq a - a = 0 \\ f(b) - b &\leq b - b = 0 \end{aligned}$$

Also nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $y \in [a, b]$, sodass $f(y) - y = 0$, und dies ist ein Fixpunkt der Funktion f .

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- $\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \right) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + \dots$ wobei alle Terme für alle $x > 0$ positiv sind. So $\frac{e^x}{x} \geq 1 + \frac{x}{2} \rightarrow +\infty$, so $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$ wenn $x \rightarrow +\infty$.
- $x e^x = -\frac{-x}{e^{-x}}$, und wenn $x \rightarrow -\infty$, es gibt $-x \rightarrow +\infty$. So $x e^x \rightarrow -(\frac{1}{+\infty}) = 0$ mit die vorherige Frage.
- $3e^{2x} - 2e^{3x} = e^{3x}(3e^{-x} - 2) \rightarrow +\infty \cdot (0 - 2) \rightarrow -\infty$ wenn $x \rightarrow +\infty$
- $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$ wenn $x \rightarrow +\infty$
- $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$ wenn $x \rightarrow -\infty$
- $x^2 e^{-\sqrt{x}} = \frac{y^4}{e^y} \rightarrow 0$ mit $y = \sqrt{x}$ sodass $y \rightarrow +\infty$ wenn $x \rightarrow \infty$
- $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} \rightarrow 0$ wenn $x \rightarrow +\infty$

2. Wahr oder falsch? Muss mit einer Zeichnung begründet werden, ohne Wort (außer "wahr"/"falsch").

- Falsch $f : x \mapsto \cos x$ mit $I =]0, 4\pi[$ gilt $f(I) = [-1, 1]$
- Wahr
- Falsch $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ mit $I =]0, 1]$ gilt $f(I) = [1, +\infty[$
- Falsch $f : x \mapsto x^2$ mit $I = [1, 4]$ gilt
- $f^{-1}(I) = [-2, -1] \cup [1, 2]$
- Falsch $x \mapsto e^x$
- Falsch: $f(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$ ist monoton wachsend mit $f(0) = 0$. $g(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{-x})$ ist monoton fallend mit $g(0) = 1$. Aber $f(x) \neq g(x)$ für alle $x \in [0, \infty)$

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Sei $f; \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = \frac{3}{4}$ für $x \in]-\infty, \frac{1}{2}]$, und $f(x) = \frac{1}{4}$ für $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. Es gibt kein Fixpunkt, aber f monoton fallende ist.

Der Fehler liegt darin, dass „Monotonie des Zwischenwertsatz impliziert“: Dies ist völlig falsch. Es wurde nie angenommen, dass f eine stetige Funktion ist.

Aufgabe 6

[Wahr oder nicht?]

1. Falsch: Aus Beispiel 6.7a wissen wir, dass Polynomfunktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$ sind. Insbesondere ist p stetig auf einem gegebenen Intervall. Allerdings ist p z.B. monoton steigend auf dem Intervall $]4, 5[$, also ist $\sup_{x \in]4, 5[} \{p(x)\} = p(5) = 111$, aber das Maximum wird nicht angenommen, denn $5 \notin]4, 5[$.
2. Falsch: $g(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht definiert in 0, also ist g nicht auf dem ganzen Intervall $[-1, 1]$ definiert. Somit sind die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes nicht erfüllt.
3. Richtig: Wir wenden die Stetigkeit von f und Satz 6.13 an:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) \\ &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) \\ &= f(y), \end{aligned}$$

also ist y ein Fixpunkt von f .

Aufgabe 7

[Stetig oder nicht?]

1. Die Polynome $x^2 + 2ax$ und a^2x sind für alle $a \in \mathbb{R}$ stetig, also müssen wir schauen, dass f auch in 1 stetig ist, nämlich: Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1, x \leq 1} x^2 + 2ax = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} a^2x?$$

Es muss also gelten

$$\begin{aligned} 1 + 2a &= a^2 \\ a^2 - 2a - 1 &= 0 \\ a &= 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Angekommen, $g(x)$ ist stetig in x , dann könnten wir $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nehmen und es gäbe $\delta > 0$ sodass für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$, $|g(x) - g(a)| < \frac{1}{2}$ gälte. Das heißt, falls $x \in \mathbb{Q}$, gilt für alle $a \in (x - \delta, x + \delta)$: $a \in \mathbb{Q}$. Allerdings ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, das heißt, $\#((x - \delta, x + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \infty$, ein Widerspruch.
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt das gleiche Argument, denn $\mathbb{Q}$ ist auch dicht in $\mathbb{R}$. Also ist $g(x)$ nirgends stetig.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 7

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Unendlich viele stetige Funktionen, 5 + 5 Punkte]

1. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz $[a, b]$ stetig und sei $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$m(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass m auf ganz $[a, b]$ stetig ist.

2. Seien nun $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von stetigen Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f_i(x)| \leq 1$ für jedes $f_i, i \in I, x \in [a, b]$. Definiere

$$M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf_{i \in I} f_i(x).$$

Ist M notwendigerweise stetig?

Aufgabe 2

[Logarithmen, 2+3+5 Punkte]

1. Seien $x, y > 0$. Beweisen Sie, dass

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y).$$

2. Seien $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$y \cdot \ln(x) = \ln(x^y).$$

3. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(n^3)}{\ln(n^8)} \cdot \ln \left(\prod_{j=1}^n \exp(1/2^j) \right).$$

Aufgabe 3

[sin, cos und Komplexe Zahlen, 4+6 Punkte]

Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

gilt.

2. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

gilt.

Hinweis: die Formel für die geometrische Summe gilt auch für komplexe Zahlen (sie müssen diese Formel nicht neu beweisen).

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{R}$ (Begründungen kurz halten):

- $\ln(x^2 - 5x + 5) = 0$
- $\cos(\ln x) = 0$
- $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$
- $\ln(\cos x) = 0$
- $\ln \frac{x \cdot y}{e} = (\ln x) \cdot (\ln y)$
- $2 \sin^2 x - \sin x = 0$

2. Füllen Sie die folgende Tabelle ohne Taschenrechner aus, mit 3 Stellen nach dem Komma für jedes Feld (1 Punkte per Feld). “log” ist der Logarithmus zur Basis 10, d. h. $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. (Für diese Frage dürfen Sie Ihr gesamtes Vorwissen verwenden, einschließlich des Wissens aus der Schulzeit sowie des Wissens, das Sie auf dieser Wikipedia-Seite finden: <https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus#Basisumrechnung>):

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	16	50	500	$\sqrt{27}$
$\log x$		0.3010	0.4771				0.8451						

Abgabe: 03.12.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Satz. Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die an allen rationalen Punkten stetig, aber an allen irrationalen Punkten unstetig ist.

Beispiel. Definiere

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Beweis (mit der ε - δ -Definition).

Sei $a \in \mathbb{Q}$. Wir müssen zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Da $f(a) = \sin(\pi a)$ und die Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist, existiert ein $\delta_1 > 0$ mit

$$|x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |\sin(\pi x) - \sin(\pi a)| < \varepsilon.$$

Für rationale x gilt $f(x) = \sin(\pi x)$, also erfüllt f die Bedingung sofort. Für irrationale x gilt $f(x) = 0$, und somit

$$|f(x) - f(a)| = |\sin(\pi a)|.$$

Falls $\sin(\pi a) = 0$, d. h. a ist eine ganze Zahl, so ist dies $0 < \varepsilon$, und die Bedingung ist erfüllt. Falls $\sin(\pi a) \neq 0$, wählen wir $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2\pi|\cos(\pi a)|}\}$; dann liegen für x nahe bei a sowohl rationale als auch irrationale Werte von $f(x)$ innerhalb von ε um $f(a)$, da $\sin(\pi x)$ stetig ist und nahe bei $\sin(\pi a)$ bleibt. Damit ist f in jedem rationalen Punkt stetig.

Sei nun $a \notin \mathbb{Q}$. Dann ist $f(a) = 0$. Wir betrachten eine Folge rationaler Zahlen $r_n \rightarrow a$. Da $f(r_n) = \sin(\pi r_n)$ und $\sin(\pi r_n) \rightarrow \sin(\pi a)$, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \sin(\pi a) \neq 0 = f(a)$$

für fast alle irrationalen a . Also existiert der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow a$ nicht gleich $f(a)$.

Daher ist f an jedem irrationalen Punkt unstetig.

f ist auf $\mathbb{Q}$ stetig und auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ unstetig.

”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 6

[arccos Polynomen]

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$T_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(n \cdot \arccos(x)).$$

Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$p_n(x) = T_n(x), \quad x \in (-1, 1).$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ für alle $n \geq 1$. Um das zu beweisen, könnte die Formel für $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ nützlich sein.

Aufgabe 7

[stetig aber diskrete]

Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $|f(\mathbb{R})|$ endlich genau dann stetig ist, wenn $|f(\mathbb{R})| = 1$.

Aufgabe 8

[abgeleitete Grenze]

1. Untersuchen Sie, ob es eine reelle Zahl $x > 0$ gibt, für die

$$e^x = 1 + x$$

gilt.

2. Bestimmen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x}.$$

Hinweis: Setzen Sie $z := \log(x+1)$ und lösen Sie nach x auf.

Aufgabe 9

[partielle Riemann-Summen]

1. Sei $\alpha > 1$ und bezeichne $S_k := \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\alpha}$, $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass

$$S_{2k+1} < 1 + 2^{1-\alpha} S_k < 1 + 2^{1-\alpha} S_{2k+1}.$$

2. Benutzen Sie die obige Abschätzung um zu zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ endlich ist.
3. Beweisen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ gilt.

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 7

Aufgabe 1

[Unendlich viele stetige Funktionen]

1. Da f und g beide stetig sind, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes $x \in [a, b]$ ein $\delta_f > 0$ und ein $\delta_g > 0$ sodass für alle $y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta_f$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

und für alle $y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta_g$ gilt

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Wir setzen $\delta := \min\{\delta_f, \delta_g\}$ und $m(x) := \min\{f(x), g(x)\}$. Gegeben $x_0 \in [a, b]$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $m(x_0) = f(x_0)$. Dann für alle $y \in [a, b]$ mit $|x_0 - y| < \delta$ gilt entweder $m(y) = f(y)$ oder $m(y) = g(y)$.

Falls $m(y) = f(y)$: $|x_0 - y| < \delta \leq \delta_f \Rightarrow |m(x_0) - m(y)| = |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$.

Falls $m(y) = g(y)$ und $f(x_0) \geq g(y)$:

$$|m(x_0) - m(y)| = |f(x_0) - g(y)| = f(x_0) - g(y) \leq g(x_0) - g(y) = |g(x_0) - g(y)| < \varepsilon,$$

denn $|x_0 - y| < \delta \leq \delta_g$ und $g(x_0) \geq f(x_0) = \min\{f(x_0), g(x_0)\} \geq g(y)$, also $g(x_0) - g(y) > 0$.
Falls $m(y) = g(y)$ und $f(x_0) < g(y)$:

$$|m(x_0) - m(y)| = |f(x_0) - g(y)| = g(y) - f(x_0) \leq f(y) - f(x_0) = |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

denn $|x_0 - y| < \delta \leq \delta_f$ und $f(y) \geq g(y) = \min\{f(y), g(y)\} > f(x_0)$.

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x_0 \in [a, b]$ gilt, ist m auf ganz $[a, b]$ stetig.

2. Für I endlich, stimmt die Aussage nach (a) mit Induktion über die Kardinalität von I . Allerdings muss es nicht mehr gelten für I unendlich.

Zum Beispiel definiere $f_n(x) := x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und setze $[a, b] = [0, 1]$. Für alle $0 \leq x < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, aber $1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

aber diese Funktion ist in 1 nicht stetig.

Aufgabe 2

[Logarithmen]

1. Wir schreiben $a := \ln(x) + \ln(y)$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} e^a &= e^{\ln(x) + \ln(y)} \\ &= e^{\ln(x)} e^{\ln(y)} \\ &= x \cdot y \\ \Leftrightarrow a &= \ln(x \cdot y). \end{aligned}$$

2. Setze $a := y \ln(x)$, dann ist

$$\begin{aligned} e^a &= e^{y \ln(x)} \\ &= \left(e^{\ln(x)} \right)^y \\ &= x^y \\ \Leftrightarrow a &= \ln(x^y). \end{aligned}$$

3. Wir vereinfachen zunächst $\ln\left(\prod_{j=1}^n \exp(1/2^j)\right)$ mithilfe von (a):

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\prod_{j=1}^n \exp(1/2^j)\right) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} \\
 &= \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{2^j}\right) - \frac{1}{2^j}\Big|_{j=0} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} - 1 \\
 &= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 1 \\
 &= 2 - \frac{1}{2^n} - 1 \\
 &= 1 - \frac{1}{2^n}.
 \end{aligned}$$

Nun können wir den Grenzwert bestimmen mithilfe von (b):

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(n^3)}{\ln(n^8)} \cdot \ln\left(\prod_{j=1}^n \exp(1/2^j)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(3 \ln n)}{8 \ln n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \ln n}{8 \ln n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
 &= \frac{3}{4},
 \end{aligned}$$

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Aufgabe 3

[sin, cos und Komplexe Zahlen]

1. Wir wenden die Identität $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ an:

$$\begin{aligned}
 (\cos x + i \sin x)^n &= (\exp ix)^n \\
 &= \exp(inx) \\
 &= \cos(nx) + i \sin(nx).
 \end{aligned}$$

2. Wir teilen die Summe zunächst auf und wenden die geometrische Summenformel an:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-n}^n e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^0 e^{ikx} + \sum_{k=0}^n e^{ikx} - e^{ikx}|_{k=0} \\
 &= \sum_{k=0}^n e^{-ikx} + \sum_{k=0}^n e^{ikx} - 1 \\
 &= \frac{1 - e^{inx+ix}}{1 - e^{ix}} + \frac{1 - e^{-inx-ix}}{1 - e^{-ix}} - 1 \\
 &= \frac{1 - e^{inx+ix}}{1 - e^{ix}} \cdot \frac{(-e^{-ix})}{(-e^{-ix})} + \frac{1 - e^{-inx-ix}}{1 - e^{-ix}} - 1 \cdot \frac{(1 - e^{-ix})}{(1 - e^{-ix})} \\
 &= \frac{(-e^{-ix} + e^{inx}) + (1 - e^{-inx-ix}) - (1 - e^{-ix})}{1 - e^{-ix}} \\
 &= \frac{e^{inx} - e^{-inx-ix}}{1 - e^{-ix}}.
 \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Identität $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} &= \frac{\frac{1}{2i}(e^{inx+ix/2} - e^{-inx-ix/2})}{\frac{1}{2i}(e^{ix/2} - e^{-ix/2})} \\
 &= \frac{e^{inx+ix/2} - e^{-inx-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \cdot \frac{e^{-ix/2}}{e^{-ix/2}} \\
 &= \frac{e^{inx} - e^{-inx-ix}}{1 - e^{-ix}},
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1.
 - $\ln y = 0 \Leftrightarrow y = 1$, so $x^2 - 5x + 5 = 1$, d.h. $x^2 - 5x + 4 = 0$. Mit $\Delta = 25 - 4 \cdot 4 = 9$, so $x = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = 1$ oder $x = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$. Die Lösenmenge ist $\{1, 4\}$.
 - Mit $y = e^x$, dann gilt $y^2 - 5y + 4 = 0$, so $\Delta = 25 - 4 \cdot 4 = 9$, so $y = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = 1$ oder $y = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$. Es folgt $x = \ln(1)$ oder $x = \ln(4)$. Die Lösenmenge ist $\{0, \ln(4)\}$.
 - Mit $X = \ln x$ und $Y = \ln y$, es folgt $\ln \frac{x \cdot y}{e} = \ln x + \ln y - \ln e = X + Y - 1$. Dies entspricht $X + Y - 1 - XY = 0$. Dann gilt $(X - 1)(Y - 1) = 0$, so $X = 1$ oder $Y = 1$, d.h. $x = e$ oder $y = e$. Die Lösenmenge ist $\{(a, e) ; a \in \mathbb{R}_+^*\} \cup \{(e, b) ; b \in \mathbb{R}_+^*\}$.
 - Setze $y := \ln x \Leftrightarrow e^y = x$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \cos y = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = e^{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Die Lösenmenge ist $\{e^{\frac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- Setze $y := \cos x$, dann folgt

$$\begin{aligned}
 \ln y = 0 &\Leftrightarrow y = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Die Lösenmenge ist $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Da $\ln y$ nur für $y > 0$ definiert ist, ist der maximale Definitionsbereich von $\ln(\cos x)$

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right).$$

- Diese Gleichung können wir faktorisieren:

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \sin^2 x - \sin x = \sin x (2 \sin x - 1) \\
\Rightarrow \sin x &= 0 \text{ oder } 2 \sin x - 1 = 0 \\
\sin x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
2 \sin x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ oder } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $\log 1 = 0$

$$\log 4 = \log(2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

$$\log 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2$$

$$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3$$

$$\log 16 = 4 \log 2$$

$$\log 50 = \log \frac{100}{2} = 2 \log 10 - \log 2 = 2 - \log 2$$

$$\log 500 = \log 10^3 - \log 2 = 3 - \log 2$$

$$\log \sqrt{27} = \frac{1}{2} \log 3^3 = \frac{3}{2} \log 3$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	16	50	500	$\sqrt{27}$
$\log x$	0	0.3010	0.4771	0.602	0.699	0.778	0.8451	0.903	0.954	1.204	1.699	2.699	0.716

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

No! No! and No again!

Choose $x = \frac{1}{2}$ (but any $x \in \mathbb{Q}$ with $x \notin \mathbb{Z}$ would do the job). Then $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Pick $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Then there exists no $\delta > 0$ such that **for all** $y \in \mathbb{R}$ with $|y - \frac{\pi}{2}| < \delta$ we have $|f(y) - 1| \leq \frac{1}{4}$. Indeed, that would mean that **for all** $y \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta]$, we have $f(y) \in [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$. But, as $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, for any $\delta > 0$, there exists $y \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta]$ with $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so $f(y) = 0$ which means $f(y) \notin [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$.

Hence, f is **not** continuous at any point of $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Aufgabe 6

[arccos Polynomen]

Wir schreiben

$$y := \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x.$$

Da $\cos(-y) = \cos(y)$ und $\sin(-y) = -\sin(y)$, gilt für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) &= \cos((n+1)y) \\
&= \cos(ny + y) \\
&= \cos(ny) \cos y - \sin(ny) \sin y \\
T_{n-1}(x) &= \cos((n-1)y) \\
&= \cos(ny - y) \\
&= \cos(ny) \cos(-y) - \sin(ny) \sin(-y) \\
&= \cos(ny) \cos y + \sin(ny) \sin y \\
\Rightarrow T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2 \cos(ny) \cos y \\
&= 2x T_n(x),
\end{aligned}$$

weil $\cos(ny) = T_n(x)$ und $\cos y = x$. Die Identität im Hinweis folgt.

Nun beweisen wir, dass $T_n(x)$ ein Polynom ist durch Induktion über n indem wir diese Identität benutzen:

$$n = 0: T_0(x) = \cos 0 = 1.$$

$$n = 1: T_1(x) = \cos y = x.$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $T_n(x)$ und $T_{n-1}(x)$ Polynome in x sind. Weil $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ und Produkte und Summen von Polynomen auch Polynome sind, ist auch $T_{n+1}(x)$ ein Polynom in x und die Aussage folgt.

Aufgabe 7

[stetig aber diskrete]

Angenommen, $|f(\mathbb{R})| \geq 2$. Sei dann $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R})$ verschieden und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $x_1 < x_2$.

Da f stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass

$$[y_1, y_2] \subseteq f([x_1, x_2]) \subseteq f(\mathbb{R}).$$

Da $y_1 \neq y_2$, ist $[y_1, y_2]$ unendlich, also ist auch $f(\mathbb{R})$ unendlich: ein Widerspruch.

Folglich gilt: Wenn $f(\mathbb{R})$ endlich und f stetig ist, dann

$$|f(\mathbb{R})| = 1.$$

Aufgabe 8

[abgeleitete Grenze]

1. Per Definition gilt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Da die rechte Summe strikt positiv ist, wenn $x > 0$, erhält man $e^x > 1 + x$ für jedes $x > 0$.

Beachten wir, dass $e^0 = 1 = 1 + 0$.

2. Wir haben

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \longrightarrow 1 \quad \text{für } z \rightarrow 0.$$

Setzt man $z = \ln(x + 1)$, so folgt $z \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$, und daher, durch Komposition:

$$\frac{\ln(x + 1)}{x} = \frac{z}{e^z - 1} \longrightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

Aufgabe 9

[partielle Riemann-Summen]

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 8

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Muss ich zweimal driften?, 10 Punkte]

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion g genau ein Extremum besitzt.

$$g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-\frac{1}{x}} \ln(x)$$

Aufgabe 2

[Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital, (1+1+1+1+2)+(2+2) Punkte]

Ziel dieser Aufgabe ist, den Satz de L'Hospital zu beweisen und anzuwenden:

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$, und es existiere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1. Gegeben eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(a, b) \setminus \{x_0\}$, definiere

$$h_n(x) := f(x) - \frac{f(y_n)}{g(y_n)} g(x).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $h_n(y_n) = h_n(x_0) = 0$.
- (b) Berechnen Sie $h'_n(x)$ als Funktion von $f'(x)$ und $g'(x)$.
- (c) Angewandt auf $h_n(y_n)$ und $h_n(x_0)$ liefert der Satz von Rolle einen Punkt z_n im Intervall $(\min\{y_n, x_0\}, \max\{y_n, x_0\})$. Berechnen Sie

$$\frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}$$

als Funktion von $f(y_n)$ und $g(y_n)$.

- (d) Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$, was ist $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (e) Beweisen Sie nun, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Berechnen Sie

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x},$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

Aufgabe 3

[Trigonometrische Ableitungen, 5+5 Punkte]

1. Zeigen Sie, dass für $f(x) = \tan x$ gilt

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x.$$

2. Zeigen Sie, dass für $g(x) = \arctan x$ gilt

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1 × 10 Punkte]

1. Wahr oder falsch? Wenn es wahr ist, begründen Sie es nicht; wenn es falsch ist, geben Sie das einfachste Gegenbeispiel an, das Ihnen einfällt (oder zeichnen Sie eine Skizze) (Für die Beantwortung dieser Frage müssen Sie den Kurs belegt haben).

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Falls $x_0 \in I$ ein lokales Maximum von f ist, ist es auch ein globales Maximum von f .
- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Falls $x_0 \in I$ ein globales Maximum von f ist, ist es auch ein lokales Maximum von f .
- Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann ist x_0 ein lokales Extremum von f .
- Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$ mit x_0 ein lokales Extremum von f . Dann ist $f'(x_0) = 0$.
- Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$ mit $f''(x_0) = 0$. Dann ist $f'(x_0) \neq 0$.
- Im Folgenden bezeichnen wir die k -te Ableitung mit $f^{(k)}(x)$. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sodass $f^{(k)}(x_0) = 0$ für alle $k \geq n$.

2. Berechnen sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (mach dir keine Gedanken über die Definitionsdomänen) (Für diese Frage dürfen Sie Ihr gesamtes Vorwissen verwenden, einschließlich des Wissens aus der Schulzeit sowie des Wissens, das Sie auf dieser Wikipedia-Seite finden: <https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung#Zusammenfassung>, und https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Analysis#Differentialrechnung):

- | | |
|---|---|
| • $f(x) = (x+1)^2 - 8(x+1) + 8 \ln(x+1)$ | • $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$ |
| • $f(x) = \exp\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$ | • $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ |
| • $f(x) = \frac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+3}}$ | • $f(x) = x \ln x - x$ |
| • $f(x) = \ln(\cos(x) + 2)$ | • $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| • $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ | |

Abgabe: 10.12.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Staz[von Darboux] Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Sind $f'(a) = A$ und $f'(b) = B$, so gilt: Für jede Zahl C zwischen A und B existiert ein Punkt $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = C.$$

Das heißt: Jede Ableitung besitzt die Zwischenwerteigenschaft.

Beweis. Ohne Einschränkung sei

$$A = f'(a) < C < B = f'(b).$$

(Für den Fall C zwischen B und A vertauscht man a und b .)

Betrachte die Funktion

$$g(x) = f(x) - Cx.$$

Dann ist g differenzierbar und damit stetig auf $[a, b]$, und es gilt

$$g'(x) = f'(x) - C.$$

Insbesondere

$$g'(a) = A - C < 0, \quad g'(b) = B - C > 0.$$

1. Schritt: Da $[a, b]$ kompakt ist und g stetig ist, nimmt g ein Minimum an. Es existiert also $x_0 \in [a, b]$ mit

$$g(x_0) = \min_{x \in [a, b]} g(x).$$

2. Schritt: x_0 **kann nicht a sein.** Wäre $x_0 = a$, so müsste wegen des lokalen Minimums gelten $g'(a) \geq 0$. Aber $g'(a) = A - C < 0$; Widerspruch.

3. Schritt: x_0 **kann nicht b sein.** Wäre $x_0 = b$, so müsste gelten $g'(b) \leq 0$. Aber $g'(b) = B - C > 0$; Widerspruch.

4. Schritt: $x_0 \in (a, b)$ **und daher $g'(x_0) = 0$.** Da x_0 ein inneres Minimum einer differenzierbaren Funktion ist, folgt

$$g'(x_0) = 0.$$

Somit

$$f'(x_0) - C = g'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = C.$$

Damit existiert ein Punkt $c = x_0 \in (a, b)$ mit $f'(c) = C$. □

”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 6

[Verallgemeinerter Mittelwertsatz für zwei Funktionen]

Seien f, g zwei auf $[a, b]$ stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen. Sei

$$\Delta : x \mapsto (f(a) - f(x))(g(b) - g(x)) - (g(a) - g(x))(f(b) - f(x)).$$

Zeigen Sie, dass Δ auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar ist, und berechnen Sie ihre Ableitung. Leiten Sie daraus ab, dass es ein $c \in]a, b[$ gibt mit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Aufgabe 7

[Es ist linear?]

Sei $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ (d.h. f' stetig ist) derart, dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sup_{x \in [a, b]} f'(x).$$

Zeigen Sie, dass f eine lineare Funktion ist (d.h. existiert α, β sodass $f(x) = \alpha x + \beta$ für alles $x \in [a, b]$).

Aufgabe 8

[Zeichnen Sie ein Bild!]

Sei f eine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$, die

$$f(0) = f(a) = f'(0) = 0$$

für ein bestimmtes $a \neq 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es in der Ebene eine Gerade gibt, die die Graph der Funktion f berührt und durch den Punkt $(0, 0)$ verläuft.

Aufgabe 9

[Versteckte Differentialgleichung]

Sei f eine differenzierbare Funktion, sodass $f'(x) + f(x) \rightarrow 0$ wenn $x \rightarrow +\infty$. Zeigen Sie, dass $f'(x) \rightarrow 0$ und $f(x) \rightarrow 0$ gilt (man kann $g(x) = e^x f(x)$ setzen).

Angenommen, wir wollen die Gleichung $f'(x) + f(x) = h(x)$ lösen, wobei f eine unbekannte Funktion und h eine bekannte Funktion ist. Angenommen, wir kennen auch eine spezielle Lösung g_o dieser Gleichung. Folgern Sie, dass für jede Lösung g dieser Gleichung gilt: $g(x) - g_o(x) \rightarrow 0$ wenn $x \rightarrow +\infty$.

Aufgabe 10[Lambert-Funktion W]

Die Lambert-Funktion W ist die eindeutige Lösung $W(x)$ der Gleichung

$$x = we^w$$

mit der Unbekannten $w \geq -1$ und dem Parameter $x \geq -1/e$. Zeigen Sie, dass W auf $[-1/e, +\infty[$ differenzierbar und wachsend ist. Berechnen Sie $W(0)$ und $W'(0)$. Zeigen Sie, dass

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}.$$

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 8

Aufgabe 1

[Muss ich zweimal driften?]

Um Extrema von g zu bestimmen, berechnen wir die Ableitung der Funktion:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \ln x + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \left(\frac{1}{x} \ln x + 1 \right) \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} > 0$ für alle $x > 0$, gilt

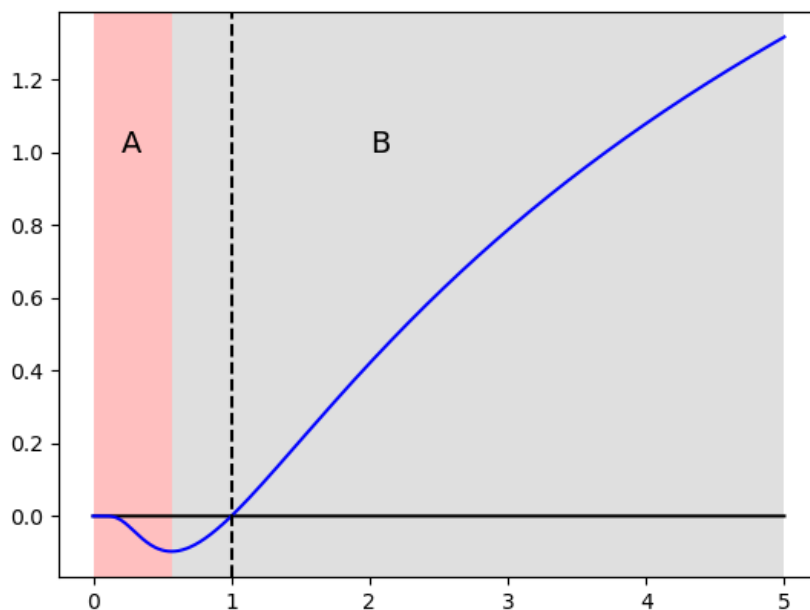
$$\begin{aligned} 0 &= g'(x) \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{x} \ln x + 1 \\ \Leftrightarrow -x &= \ln x. \end{aligned}$$

Da $-x$ monoton fallend ist und $\ln x$ monoton steigend, gibt es nur eine einzige Lösung dieser Gleichung (nämlich $x_0 = 0,56714\dots$). Man kann die Funktion $h : x \mapsto x + \ln x$ auch differenzieren: Da ihre Ableitung $h'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ streng positiv ist für $x > 0$, ist sie streng monoton steigend; und da $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ und $h(1) = 1 > 0$ existiert eine eindeutige Lösung $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ für $h(x) = 0$ (und dann gilt $x_0 \in (0, 1)$).

Für $x < x_0$ ist $g'(x) < 0$ und für $x > x_0$ ist $g'(x) > 0$, also gilt

$$\begin{aligned} x \in (0, 0,56714\dots) &=: A & g \text{ monoton fallend} \\ x \in (0,56714\dots, \infty) &=: B & g \text{ monoton wachsend} \end{aligned}$$

Es folgt, dass g ein lokales und globales Minimum im Punkt $(0,56714\dots, g(0,56714\dots)) = (0,56714\dots, 0,09726\dots)$ und keine lokalen bzw. globalen Maxima.



Aufgabe 2

[Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital]

1. (a) Da $f(x_0) = g(x_0) = 0$, gilt

$$h_n(y_n) = f(y_n) - \frac{f(y_n)}{g(y_n)}g(y_n) = f(y_n) - f(y_n) = 0,$$

$$h_n(x_0) = f(x_0) - \frac{f(y_n)}{g(y_n)}g(x_0) = 0 - \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \cdot 0 = 0.$$

- (b) Da $f(y_n), g(y_n)$ Konstante bezüglich x sind, gilt

$$h'_n(x) = f'(x) - \frac{f(y_n)}{g(y_n)}g'(x).$$

- (c) Nach dem Satz von Rolle existiert ein $z_n \in (\min\{y_n, x_0\}, \max\{y_n, x_0\})$ mit $h'_n(z_n) = h_n(y_n) - h_n(x_0) = 0$. Das heißt

$$0 = h'_n(z_n) = f'(z_n) - \frac{f(y_n)}{g(y_n)}g'(z_n)$$

$$\Rightarrow f'(z_n) = \frac{f(y_n)}{g(y_n)}g'(z_n)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)} = \frac{f(y_n)}{g(y_n)}.$$

- (d) Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$, muss auch $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_0$, denn z_n ist zwischen x_0 und y_n für alle n . Das heißt, $|z_n - x_0| < |y_n - x_0|$ für alle n . Insbesondere: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ gilt genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt $\varepsilon > |y_n - x_0| > |z_n - x_0|$.
- (e) Nach der Konstruktion oben und der Stetigkeit von f, g gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

2. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(x)' = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$:

$$(1 - \cos x)' = \sin x$$

$$(x^2)' = 2x$$

In diesem Fall müssen wir die zweiten Ableitung ausrechnen, denn $\sin(0) = 0 = 2 \cdot 0$:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(2x)' = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3

[Trigonometrische Ableitungen]

1. Wir schreiben $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und berechnen die Ableitung mit Hilfe der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
 &= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 \\
 &= 1 + \tan^2 x.
 \end{aligned}$$

2. Die Umkehrfunktion von g ist $h(x) = \tan x$, also nach Satz 8.6 gilt

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{1}{h'(g(x))} \\
 &= \frac{1}{1 + (\tan(g(x)))^2} \\
 &= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} \\
 &= \frac{1}{1 + x^2}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1. Wahr oder falsch? Wenn es wahr ist, begründen Sie es nicht; wenn es falsch ist, geben Sie das einfachste Gegenbeispiel an, das Ihnen einfällt (oder zeichnen Sie eine Skizze).
- Falsch: $f : x \mapsto x^4 - x^2$ hat ein lokales Maximum $x_0 = 0$ aber kein globales Maximum.
 - Wahr
 - Falsch: $f : x \mapsto x^3$. Dann gilt $f'(0) = 0$ aber es gibt kein Extremum.
 - Wahr
 - Falsch: $f : x \mapsto x^2$. Dann gilt $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 0$ für alles $x \in \mathbb{R}$. So, mit $x_0 = 1$, es fällt $f'(1) \neq 0$ aber $f''(1) = 0$.
 - Falsch: $f : x \mapsto e^x$ mit $x_0 = 0$. Dann gilt $f^{(k)}(x) = e^x$ und $f^{(k)}(0) = 1 \neq 0$ für alles $k \geq 0$.
2. Berechnen sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (mach dir keine Gedanken über die Definitionsdomänen):

- $f(x) = x^2 - 6x - 7 + 8 \ln(x+1)$, so $f'(x) = 2x - 6 + \frac{8}{x+1} = \frac{2(x-1)^2}{x+1}$
- $g(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$ mit $g'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - 2x \cdot (x^2+2)}{(x^2-1)^2} = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$. Dann gilt $f'(x) = g'(x) \exp(g(x)) = \frac{-6x}{(x^2-1)^2} \exp\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$
- $g(x) = \sqrt{4x+5} = (4x+5)^{1/2}$, so $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4x+5)^{-1/2}$. Dann gilt: $f'(x) = \frac{2(4x+5)^{-1/2} \sqrt{4x+3} - 2(4x+3)^{-1/2} \sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+3}^2} = \frac{2(4x+3) - 2(4x+5)}{(4x+3)\sqrt{(4x+3)(4x+5)}} = \frac{-4}{\sqrt{(4x+3)^3(4x+5)}}$
- $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x + 2}$
- $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = g(x)$ und $g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$
- $g(x) = \cos \ln x$, so $g'(x) = -\frac{1}{x} \sin \ln x$. Dann gilt $f'(x) = \frac{(-\frac{1}{x} \sin \ln x) \cdot x - 1 \cdot \cos \ln x}{x^2} = -\frac{\sin \ln x + \cos \ln x}{x^2}$
- $f(x) = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$, so $f'(x) = \left(1 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-1/x^2}{1 + \frac{1}{x}}\right) \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$
 $= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
- $f'(x) = \ln x$

- $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Es war eine Falle: Ausnahmsweise ist diese Argumentation völlig richtig und gerechtfertigt (ich wollte Ihnen das Satz von Darboux und seinen Beweis vorlesen). Beachten Sie, dass im Satz von Darboux nicht angenommen wird, dass f' stetig ist.

Aufgabe 6

[Verallgemeinerter Mittelwertsatz für zwei Funktionen]

Δ ist aufgrund der Rechenregeln für Produkte auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Wir haben:

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= -f'(x)(g(b) - g(x)) - g'(x)(f(a) - f(x)) + g'(x)(f(b) - f(x)) + f'(x)(g(a) - g(x)) \\ &= f'(x)(g(a) - g(b)) + g'(x)(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

Außerdem gilt $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$, also können wir den Satz von Rolle anwenden und erhalten:

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Für $g : x \mapsto x$ erhält man die Gleichung des Satzes über die mittleren Änderungsraten (Satz der mittleren Werte). Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung davon.

Aufgabe 7

[Es ist linear?]

Da f' stetig ist, ist es auf $[a, b]$ beschränkt; wir können also

$$M = \sup_x f'(x)$$

setzen. Wir konstruieren g als die affine Funktion, die in a und b dieselben Werte wie f annimmt:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Schließlich sei

$$h = f - g.$$

Man bemerkt, dass $h(a) = h(b) = 0$. Außerdem ist h stetig und auf $[a, b]$ differenzierbar mit

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Angenommen, es gilt

$$M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

so folgt

$$h'(x) = f'(x) - M \leq 0,$$

also ist h monoton fallend. Da jedoch $h(a) = h(b) = 0$ gilt, ist h notwendig konstant und sogar identisch null.

Folglich ist $f = g$, also f ist eine affine Funktion.

Aufgabe 8

[Zeichnen Sie ein Bild!]

Wir nehmen $a > 0$, um zu argumentieren und Skizzen anzufertigen (für $a < 0$ kann man $x \mapsto f(-x)$ betrachten).

Die Gleichung der Tangente im Punkt x_0 an die Kurve von f lautet

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Sie geht also durch $(0, 0)$ genau dann, wenn

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Eine Skizze anfertigen!

Wir definieren die Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Nach den Voraussetzungen $f(0) = f'(0) = 0$ ist g in 0 stetig.

Damit ist g auf $[0, a]$ stetig und auf $]0, a[$ differenzierbar, mit

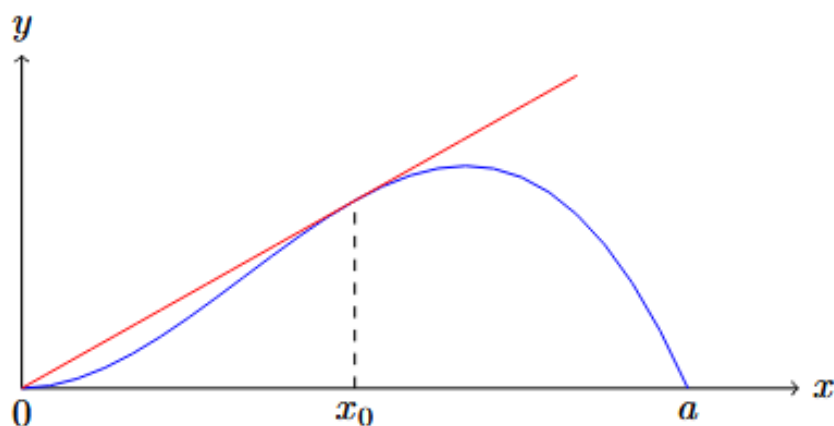
$$g(0) = 0 = g(a).$$

Wir wenden den Satz von Rolle an und erhalten ein $x_0 \in]0, a[$ mit

$$g'(x_0) = 0.$$

Da $x_0 \neq 0$ ist, erhält man durch einfaches Ableiten die gesuchte Gleichung:

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$



Aufgabe 9

[Versteckte Differentialgleichung]

Wenn $u_1 < u_0$, so zeigt man aufgrund der Monotonie von f durch Induktion, dass die Folge $(u_n)_n$ positiv und fallend ist, also konvergiert, sagen wir gegen ℓ ; und wegen der Stetigkeit von f gilt dann $f(\ell) = \ell$.

Wenn $u_1 > u_0$, so ist die Folge $(u_n)_n$ wachsend. Wir zeigen nun, dass sie konvergent ist, da sie nach oben beschränkt ist. Nehmen wir an, sie sei nicht nach oben beschränkt, dann divergiert sie gegen $+\infty$. Ab einem gewissen Index gilt jedoch

$$\frac{f(u_n)}{u_n} \leq k + \varepsilon \quad \text{mit } k + \varepsilon < 1.$$

In diesem Fall ist

$$u_{n+1} < (k + \varepsilon)u_n < u_n,$$

was der Wachstumsannahme widerspricht. Also ist $(u_n)_n$ beschränkt und damit konvergent (gegen einen Fixpunkt von f).

In jedem Fall konvergiert die Folge $(u_n)_n$. Dabei haben wir zugleich gezeigt, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 10[Lambert-Funktion W]

Wir definieren die Funktion $f : x \mapsto xe^x$. W ist deren Umkehrfunktion auf dem Intervall $[-1/e, +\infty[$ mit Werten in $[-1, +\infty[$. Insbesondere ist W differenzierbar als Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion, deren Ableitung

$$f'(x) = (1+x)e^x \geq 0 \quad \text{für } x \geq -1/e$$

beträgt. Somit gilt:

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}} = \frac{1}{x + e^{W(x)}}.$$

Ferner gilt $W(0) = 0$, da 0 die einzige Lösung der Gleichung

$$0 = we^w$$

in der Unbekannten w ist. Daher ist $W'(0) = 1$ und $W(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$.

Um weiterzugehen, bemerken wir, dass für $x \neq 0$ auch $W(x) \neq 0$ gilt (zum einen, weil W als Umkehrfunktion einer monotonen Funktion selbst monoton ist, zum anderen, weil W injektiv ist und wir bereits das Urbild von 0 kennen). Daher kann man für $x \neq 0$ schreiben:

$$e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)},$$

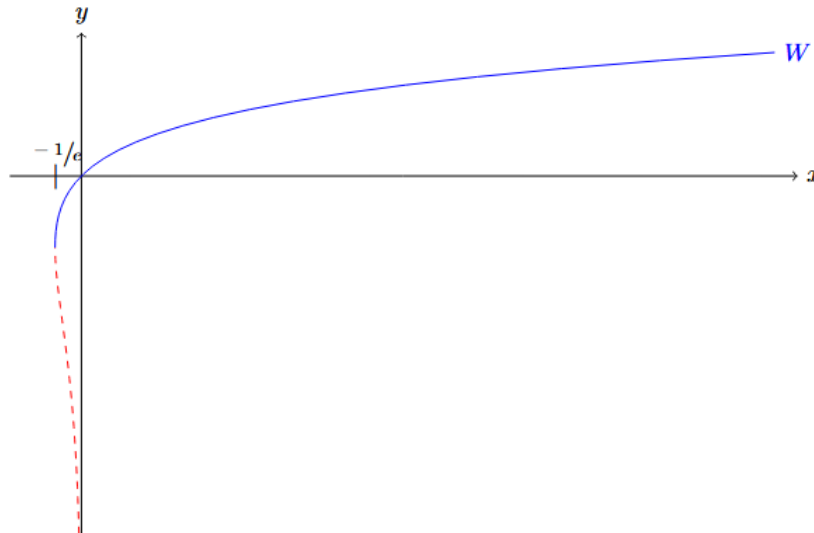
was impliziert:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Dies ergibt die Differentialgleichung, deren Lösung W ist:

$$x(1+y)y' = y.$$

Damit wird es wesentlich einfacher, die Koeffizienten der Taylorentwicklung von W zu bestimmen.



Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 9

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[vollständige Funktionsanalyse, 10 Punkte]

Zeichnen Sie (und begründen Sie Ihre Zeichnung) die folgende Funktion:

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Hinweis: Erklären Sie, wo die Funktion definiert ist, wo sie stetig ist und wo sie differenzierbar ist. Berechnen Sie ihre Ableitung und untersuchen Sie das Vorzeichen dieser Ableitung. Bestimmen Sie die Extremstellen von f und berechnen Sie die Grenzwerte an den interessanten Stellen (einschließlich bei $-\infty$ und $+\infty$).

Aufgabe 2

[seltsame lineare Funktion, 10 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung, die der Bedingung $f(f(x)) = \frac{x}{2} + 3$ genügt. Zeigen Sie, dass f' konstant ist, und bestimmen Sie anschließend f . Sie können damit beginnen, $f(\frac{x}{2} + 3)$ als Funktion von $f(x)$ auszudrücken.

Aufgabe 3

[Methode des Mittelpunktes, 2+2+2+2+2 Punkte]

Sei f auf $[a, b]$ zweimal differenzierbar. Wir bezeichnen $m = \frac{a+b}{2}$.

1. Zunächst wollen wir zeigen, dass es für jedes $x \in (a, b)$ ein $c \in (a, b)$ gibt, das von x abhängt und für das gilt:

$$f(x) = f(m) + (x - m) f'(m) + \frac{(x - m)^2}{2} f''(c).$$

Fixieren wir dazu ein $x \in (a, b)$ und definieren die Funktion

$$g : t \mapsto f(x) - f(t) - (x - t) f'(t) - K(x - t)^2,$$

wobei K so gewählt wird, dass $g(m) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist, und berechnen Sie $g'(t)$.

2. Wenden Sie den Satz von Rolle an, um den Wert von K zu bestimmen.
3. Folgern Sie daraus die gewünschte Formel.

Anschließend verwenden wir diese Formel, um eine gute Approximation des Integrals einer Funktion zu erhalten.

4. Zeigen Sie anschließend, dass mit $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$ gilt:

$$\int_a^b f(t) dt \leq (b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} M_2.$$

5. Geben Sie zwei geometrische Interpretationen der obigen Formel an: eine durch Einzeichnen der Horizontalen $y = f(\frac{a+b}{2})$, und eine durch Einzeichnen der Tangente im Punkt $\frac{a+b}{2}$.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch? Wenn es wahr ist, begründen Sie es nicht; wenn es falsch ist, geben Sie das einfachste Gegenbeispiel an, das Ihnen einfällt (oder zeichnen Sie eine Skizze) (Für die Beantwortung dieser Frage müssen Sie den Kurs belegt haben).
 - Wenn zwei Funktionen auf einem Intervall dieselbe Ableitung haben, dann unterscheiden sie sich auf diesem Intervall nur um eine Konstante.
 - Wenn $f'(x)$ überall existiert und stets gleich null ist, dann muss f eine konstante Funktion sein.
 - Wenn $f'(a)$ existiert und positiv ist, dann liegt der Graph von f in der Nähe von a vollständig oberhalb der Tangente an f in a .
 - Wenn $f'(a)$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ und ist gleich $f'(a)$.
 - Wenn f differenzierbar ist und $f'(x) \neq 0$ für alle x , dann ist f injektiv (d.h. eineindeutig).
 - Wenn f zweimal differenzierbar ist und $f''(x) > 0$ für alle x , dann hat f höchstens einen Extrem- oder Sattelpunkt.
 - Wenn f differenzierbar und periodisch ist (d.h. es gibt $T > 0$ mit $f(x+T) = f(x)$ für alle x), dann muss auch f' periodisch sein.
 - Wenn f differenzierbar und f' periodisch ist, dann muss auch f periodisch sein.
2. Berechnen sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (mach dir keine Gedanken über die Definitionsdomänen) (Für diese Frage dürfen Sie Ihr gesamtes Vorwissen verwenden, einschließlich des Wissens aus der Schulzeit sowie des Wissens, das Sie auf dieser Wikipedia-Seite finden: <https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung#Zusammenfassung>, und https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Analysis#Differentialrechnung):
 - $\sqrt{1+x^2}e^x$
 - $x^{\ln x}$
 - x^x für $x > 0$
 - $\frac{\tan(x)}{x^2+1}$
 - $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$
 - $x^2 e^{3x}$
 - $\sin(3x) \cos(2x)$
 - $\arctan(x^2)$
 - $(x^2 + 1)^{5/2}$
 - $\ln\left(\frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Abgabe: 17.12.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Staz[von Darboux] Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Sind $f'(a) = A$ und $f'(b) = B$, so gilt: Für jede Zahl C zwischen A und B existiert ein Punkt $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = C.$$

Das heißt: Jede Ableitung besitzt die Zwischenwerteigenschaft.

Beweis. Ohne Einschränkung sei

$$A = f'(a) < C < B = f'(b).$$

(Für den Fall C zwischen B und A vertauscht man a und b .)

Betrachte die Funktion

$$g(x) = f(x) - Cx.$$

Dann ist g differenzierbar und damit stetig auf $[a, b]$, und es gilt

$$g'(x) = f'(x) - C.$$

Insbesondere

$$g'(a) = A - C < 0, \quad g'(b) = B - C > 0.$$

1. Schritt: Da $[a, b]$ kompakt ist und g stetig ist, nimmt g ein Minimum an. Es existiert also $x_0 \in [a, b]$ mit

$$g(x_0) = \min_{x \in [a, b]} g(x).$$

2. Schritt: x_0 **kann nicht a sein.** Wäre $x_0 = a$, so müsste wegen des lokalen Minimums gelten $g'(a) \geq 0$. Aber $g'(a) = A - C < 0$; Widerspruch.

3. Schritt: x_0 **kann nicht b sein.** Wäre $x_0 = b$, so müsste gelten $g'(b) \leq 0$. Aber $g'(b) = B - C > 0$; Widerspruch.

4. Schritt: $x_0 \in (a, b)$ **und daher** $g'(x_0) = 0$. Da x_0 ein inneres Minimum einer differenzierbaren Funktion ist, folgt

$$g'(x_0) = 0.$$

Somit

$$f'(x_0) - C = g'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = C.$$

Damit existiert ein Punkt $c = x_0 \in (a, b)$ mit $f'(c) = C$. □

”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 6

[Verallgemeinerter Mittelwertsatz für zwei Funktionen]

Seien f, g zwei auf $[a, b]$ stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen. Sei

$$\Delta : x \mapsto (f(a) - f(x))(g(b) - g(x)) - (g(a) - g(x))(f(b) - f(x)).$$

Zeigen Sie, dass Δ auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar ist, und berechnen Sie ihre Ableitung. Leiten Sie daraus ab, dass es ein $c \in]a, b[$ gibt mit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Aufgabe 7

[Es ist linear?]

Sei $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ (d.h. f' stetig ist) derart, dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sup_{x \in [a, b]} f'(x).$$

Zeigen Sie, dass f eine lineare Funktion ist (d.h. existiert α, β sodass $f(x) = \alpha x + \beta$ für alles $x \in [a, b]$).

Aufgabe 8

[Zeichnen Sie ein Bild!]

Sei f eine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$, die

$$f(0) = f(a) = f'(0) = 0$$

für ein bestimmtes $a \neq 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es in der Ebene eine Gerade gibt, die die Graph der Funktion f berührt und durch den Punkt $(0, 0)$ verläuft.

Aufgabe 9

[Versteckte Differentialgleichung]

Sei f eine differenzierbare Funktion, sodass $f'(x) + f(x) \rightarrow 0$ wenn $x \rightarrow +\infty$. Zeigen Sie, dass $f'(x) \rightarrow 0$ und $f(x) \rightarrow 0$ gilt (man kann $g(x) = e^x f(x)$ setzen).

Angenommen, wir wollen die Gleichung $f'(x) + f(x) = h(x)$ lösen, wobei f eine unbekannte Funktion und h eine bekannte Funktion ist. Angenommen, wir kennen auch eine spezielle Lösung g_o dieser Gleichung. Folgern Sie, dass für jede Lösung g dieser Gleichung gilt: $g(x) - g_o(x) \rightarrow 0$ wenn $x \rightarrow +\infty$.

Aufgabe 10[Lambert-Funktion W]

Die Lambert-Funktion W ist die eindeutige Lösung $W(x)$ der Gleichung

$$x = we^w$$

mit der Unbekannten $w \geq -1$ und dem Parameter $x \geq -1/e$. Zeigen Sie, dass W auf $[-1/e, +\infty[$ differenzierbar und wachsend ist. Berechnen Sie $W(0)$ und $W'(0)$. Zeigen Sie, dass

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}.$$

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 9

Aufgabe 1

[vollständige Funktionsanalyse]

$\frac{x^3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ oder $x \geq 1$, so f ist definiert, stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$. Sie ist außerdem in 0 definiert und stetig, und ihr Limes von rechts bei 1 ist $+\infty$.

f ist auf ihrer Definitionsmenge tatsächlich differenzierbar. Man kann ihre Ableitung berechnen (wir haben $f(x) = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-1}}$):

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^{1/2} \cdot \sqrt{x-1} - x^{3/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{2x-3}{2x(x-1)} \cdot \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-1}}$$

Da $\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-1}} (= f(x))$ immer positiv ist, erhält man daraus die Vorzeichen der Ableitung f' sowie die Monotonietabelle von f , sehen Sie Figure 1.

x	$-\infty$	0	1	$3/2$	$+\infty$	
$f'(x)$	–	0		–	0	+
f	$+\infty$			$+\infty$		$+\infty$

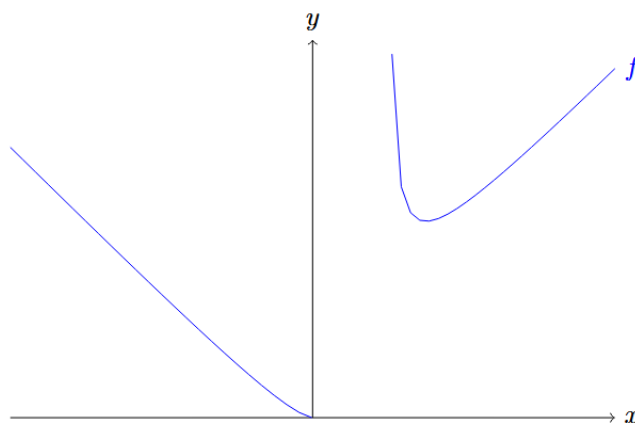


Abbildung 1: vollständige Funktionsanalyse

Aufgabe 2

[seltsame lineare Funktion]

Man bemerkt zunächst, dass:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f\left(f(f(x))\right) = f(f(f(x))) = \frac{f(x)}{2} + 3.$$

Wir können diese Gleichung ableiten, um zu erhalten:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f'(x).$$

Sei nun $(u_n(x))_n$ die Folge definiert durch

$$u_0(x) = x \quad \text{und} \quad u_{n+1}(x) = \frac{1}{2}u_n(x) + 3.$$

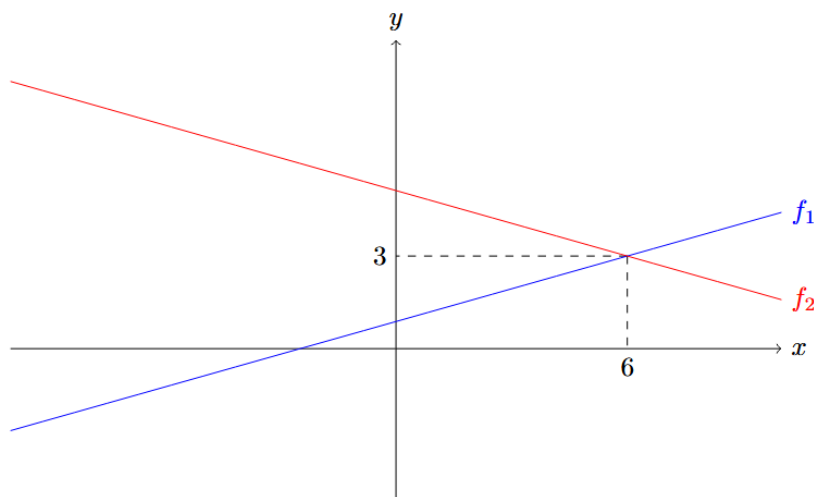


Abbildung 2: Eine seltsame lineare Funktion

Die Folge ist arithmetisch-geometrisch und konvergiert gegen $6 (= 3/(1-1/2))$. Schließlich, aufgrund der Stetigkeit von f' , gilt:

$$f'(u_n(x)) \rightarrow f'(6) \quad \text{für } n \rightarrow +\infty.$$

Aber wir wissen, dass $(f(u_n(x)))_n$ eine konstante Folge ist, also folgt daraus:

$$f'(x) = f'(u_0(x)) = f'(6).$$

Damit haben wir gezeigt, dass f' konstant ist! Folglich ist f eine affine Funktion:

$$f(x) = \alpha x + \beta.$$

Umgekehrt, wenn $f(x) = \alpha x + \beta$, dann ist f eine Lösung des Problems unter der Bedingung:

$$\forall x, \quad (\alpha^2 - 1/2)x + \alpha\beta + \beta - 3 = 0.$$

Dies liefert uns die beiden einzigen Lösungen des Problems (sehen Sie Figure 2):

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2 - \sqrt{2}), \quad f_2 : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2 + \sqrt{2}).$$

Aufgabe 3

[Methode des Mittelpunktes]

1. Achtung: x ist fest, t variiert. Da f zweimal differenzierbar ist, ist g einmal differenzierbar, und wir erhalten:

$$g'(t) = 0 - f'(t) - \left(-f'(t) + (x-t)f''(t)\right) + 2K(x-t) = (x-t)(2K - f''(t)).$$

2. Offenbar gilt $g(x) = 0$. Nach Definition von K haben wir auch $g(m) = 0$. Daher können wir den Satz von Rolle anwenden und erhalten ein c , das **streng** zwischen x und m liegt, so dass $g'(c) = 0$ ist. Dies impliziert $(x-c)(2K - f''(c)) = 0$. Da $c \neq x$ ist, folgt $K = \frac{f''(c)}{2}$.
3. Da $g(m) = 0$ ist, ergibt das Einsetzen des soeben gefundenen Wertes von K :

$$f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) - \frac{f''(c)}{2}(x-m)^2 = 0.$$

Stellt man nach $f(x)$ um, so erhält man die gewünschte Formel.

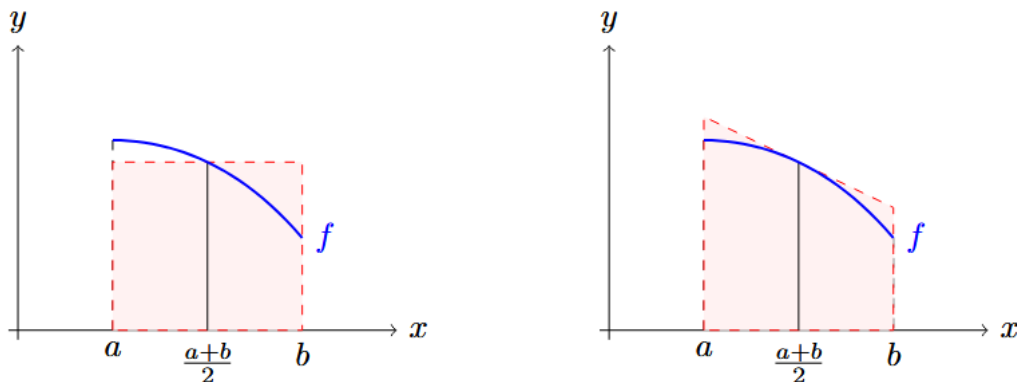


Abbildung 3: Methode des Mittelpunkts

4. Wir integrieren die erhaltene Formel über $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt + \int_a^b \frac{\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(c_t) dt \\ &\leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 0 + \frac{M_2}{2} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^2 dt \\ &\leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{M_2}{24} (b-a)^3 \end{aligned}$$

5. Man kann dieses Ergebnis auf zwei Arten interpretieren, sehen Sie Figure 3. Erstens wird das Integral von f über $[a, b]$ sehr gut durch das Rechteck geschätzt, das durch den Mittelpunkt verläuft. Dieses Ergebnis ist etwas überraschend, da dieses Rechteck die Schwankungen von f scheinbar nicht erfasst (insbesondere liefert die übliche Rechteckmethode, bei der die Höhe des Rechtecks durch den linken oder rechten Punkt festgelegt wird, einen Fehler der Größenordnung $(b-a)^2$, was deutlich schlechter ist).

Dieses Ergebnis lässt sich durch eine zweite Interpretation erklären: $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ist nach unserer Integralrechnung auch die Fläche unter der Tangente an die Kurve im Punkt $\frac{a+b}{2}$.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1.
 - **Wahr**
 - **Wahr** Wenn $f'(x) = 0$ für alle x gilt, dann ist f konstant. (Begründung: Aus dem Hauptsatz folgt $f(x) = C$.)
 - **Falsch** *Beispiel:* $f(x) = \ln x$, $a = 1$; oder $f(x) = \tan x$, $a = 0$.
 - **Wahr**
 - **Wahr**
 - **Wahr**
 - **Wahr**
 - **Falsch** *Beispiel:* Sei $f(x) = x + \sin x$. Dann ist $f'(x) = 1 + \cos x$, eine periodische Funktion, aber f selbst ist nicht periodisch, da x keine Periode besitzt.
2.
 - $f(x) = \sqrt{1 + x^2} e^x$

Lösung: Verwenden der Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}e^x} \cdot \frac{d}{dx}(x^2e^x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}e^x} \cdot (2xe^x + x^2e^x) = \frac{e^x(2x+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}e^x}.$$

- $f(x) = x^{\ln x}$

Lösung: Logarithmische Ableitung:

$$\ln f(x) = (\ln x) \ln x = (\ln x)^2 \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2 \ln x}{x} \implies f'(x) = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = 2x^{\ln x - 1} \ln x.$$

- $f(x) = x^x, x > 0$

Lösung: Logarithmische Ableitung:

$$\ln f(x) = x \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \implies f'(x) = x^x (\ln x + 1).$$

- $f(x) = \frac{\tan(x)}{x^2 + 1}$

Lösung: Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2) \sec^2(x) - \tan(x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}.$$

- $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5$

Lösung: Kettenregel:

$$f'(x) = 5 \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 5 \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

- $f(x) = x^2 e^{3x}$

Lösung: Produktregel:

$$f'(x) = 2xe^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = e^{3x}(2x + 3x^2).$$

- $f(x) = \sin(3x) \cos(2x)$

Lösung: Produktregel:

$$f'(x) = 3 \cos(3x) \cos(2x) + \sin(3x)(-2 \sin(2x)) = 3 \cos(3x) \cos(2x) - 2 \sin(3x) \sin(2x).$$

- $f(x) = \arctan(x^2)$

Lösung: Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^4}.$$

- $f(x) = (x^2 + 1)^{5/2}$

Lösung: Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{5}{2}(x^2 + 1)^{3/2} \cdot 2x = 5x(x^2 + 1)^{3/2}.$$

- $f(x) = \ln \left(\frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^2}} \right)$

Lösung: Logarithmengesetze + Kettenregel:

$$f(x) = \ln(1 + x^4) - \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) \implies f'(x) = \frac{4x^3}{1 + x^4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{4x^3}{1 + x^4} + \frac{x}{1 - x^2}.$$

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Es war eine Falle: Ausnahmsweise ist diese Argumentation völlig richtig und gerechtfertigt (ich wollte Ihnen das Satz von Darboux und seinen Beweis vorlesen). Beachten Sie, dass im Satz von Darboux nicht angenommen wird, dass f' stetig ist.

Aufgabe 6

[Verallgemeinerter Mittelwertsatz für zwei Funktionen]

Δ ist aufgrund der Rechenregeln für Produkte auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Wir haben:

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= -f'(x)(g(b) - g(x)) - g'(x)(f(a) - f(x)) + g'(x)(f(b) - f(x)) + f'(x)(g(a) - g(x)) \\ &= f'(x)(g(a) - g(b)) + g'(x)(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

Außerdem gilt $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$, also können wir den Satz von Rolle anwenden und erhalten:

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Für $g : x \mapsto x$ erhält man die Gleichung des Satzes über die mittleren Änderungsraten (Satz der mittleren Werte). Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung davon.

Aufgabe 7

[Es ist linear?]

Da f' stetig ist, ist es auf $[a, b]$ beschränkt; wir können also

$$M = \sup_x f'(x)$$

setzen. Wir konstruieren g als die affine Funktion, die in a und b dieselben Werte wie f annimmt:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Schließlich sei

$$h = f - g.$$

Man bemerkt, dass $h(a) = h(b) = 0$. Außerdem ist h stetig und auf $[a, b]$ differenzierbar mit

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Angenommen, es gilt

$$M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

so folgt

$$h'(x) = f'(x) - M \leq 0,$$

also ist h monoton fallend. Da jedoch $h(a) = h(b) = 0$ gilt, ist h notwendig konstant und sogar identisch null.

Folglich ist $f = g$, also f ist eine affine Funktion.

Aufgabe 8

[Zeichnen Sie ein Bild!]

Wir nehmen $a > 0$, um zu argumentieren und Skizzen anzufertigen (für $a < 0$ kann man $x \mapsto f(-x)$ betrachten).

Die Gleichung der Tangente im Punkt x_0 an die Kurve von f lautet

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Sie geht also durch $(0, 0)$ genau dann, wenn

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Eine Skizze anfertigen!

Wir definieren die Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Nach den Voraussetzungen $f(0) = f'(0) = 0$ ist g in 0 stetig.

Damit ist g auf $[0, a]$ stetig und auf $]0, a[$ differenzierbar, mit

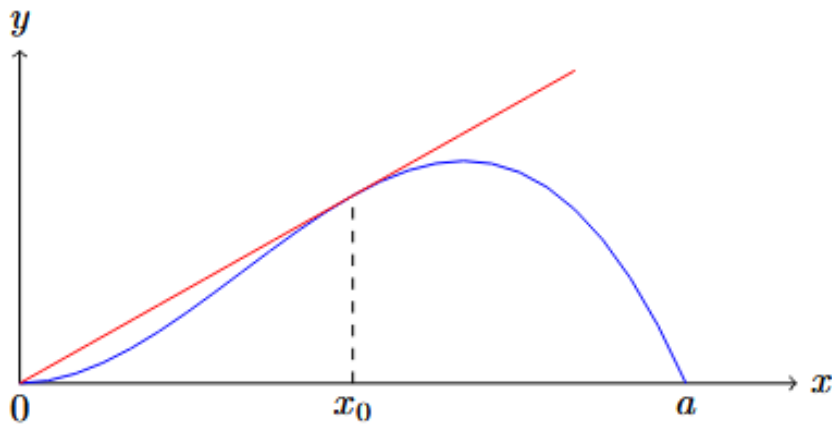
$$g(0) = 0 = g(a).$$

Wir wenden den Satz von Rolle an und erhalten ein $x_0 \in]0, a[$ mit

$$g'(x_0) = 0.$$

Da $x_0 \neq 0$ ist, erhält man durch einfaches Ableiten die gesuchte Gleichung:

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$



Aufgabe 9

[Versteckte Differentialgleichung]

Wenn $u_1 < u_0$, so zeigt man aufgrund der Monotonie von f durch Induktion, dass die Folge $(u_n)_n$ positiv und fallend ist, also konvergiert, sagen wir gegen ℓ ; und wegen der Stetigkeit von f gilt dann $f(\ell) = \ell$.

Wenn $u_1 > u_0$, so ist die Folge $(u_n)_n$ wachsend. Wir zeigen nun, dass sie konvergent ist, da sie nach oben beschränkt ist. Nehmen wir an, sie sei nicht nach oben beschränkt, dann divergiert sie gegen $+\infty$. Ab einem gewissen Index gilt jedoch

$$\frac{f(u_n)}{u_n} \leq k + \varepsilon \quad \text{mit } k + \varepsilon < 1.$$

In diesem Fall ist

$$u_{n+1} < (k + \varepsilon)u_n < u_n,$$

was der Wachstumsannahme widerspricht. Also ist $(u_n)_n$ beschränkt und damit konvergent (gegen einen Fixpunkt von f).

In jedem Fall konvergiert die Folge $(u_n)_n$. Dabei haben wir zugleich gezeigt, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 10

[Lambert-Funktion W]

Wir definieren die Funktion $f : x \mapsto xe^x$. W ist deren Umkehrfunktion auf dem Intervall $[-1/e, +\infty[$ mit Werten in $[-1, +\infty[$. Insbesondere ist W differenzierbar als Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion, deren Ableitung

$$f'(x) = (1+x)e^x \geq 0 \quad \text{für } x \geq -1/e$$

beträgt. Somit gilt:

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}} = \frac{1}{x + e^{W(x)}}.$$

Ferner gilt $W(0) = 0$, da 0 die einzige Lösung der Gleichung

$$0 = we^w$$

in der Unbekannten w ist. Daher ist $W'(0) = 1$ und $W(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$.

Um weiterzugehen, bemerken wir, dass für $x \neq 0$ auch $W(x) \neq 0$ gilt (zum einen, weil W als Umkehrfunktion einer monotonen Funktion selbst monoton ist, zum anderen, weil W injektiv ist und wir bereits das Urbild von 0 kennen). Daher kann man für $x \neq 0$ schreiben:

$$e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)},$$

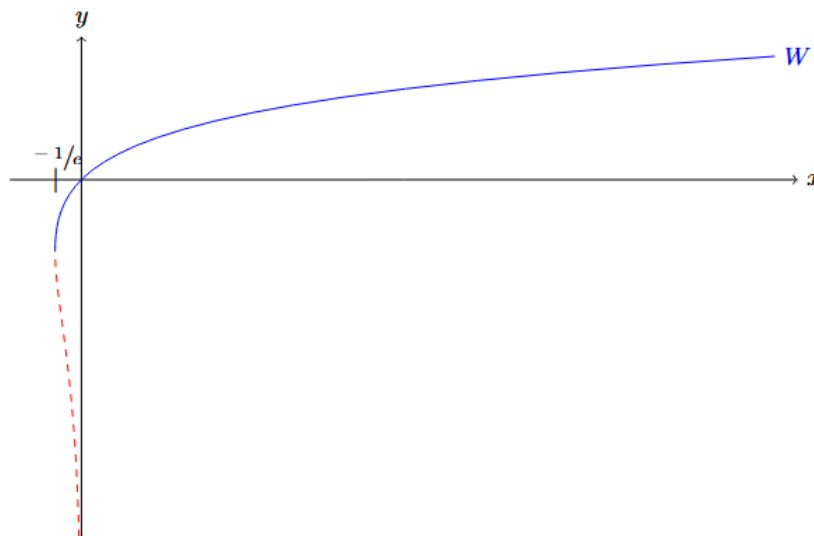
was impliziert:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Dies ergibt die Differentialgleichung, deren Lösung W ist:

$$x(1+y)y' = y.$$

Damit wird es wesentlich einfacher, die Koeffizienten der Taylorentwicklung von W zu bestimmen.



Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 10

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1 [Umfangslänge des Einheitskreis, 10 Punkte]
In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass die Umfangslänge des Einheitskreis 2π ist. Dazu benötigen wir die Formel der Länge L einer Kurve $f(x)$ zwischen x_1 und x_2 :

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Wir parametrisieren den oberen Halbkreis als $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, also ist die Umfangslänge des Einheitskreis durch $2L$ gegeben.

Zeigen Sie, dass $2L = 2\pi$.

Aufgabe 2 [Eine Folge von Integralen, 2+2+2+2+2 Punkte]
Erinnerung: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, und $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Wir setzen $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) \, dx$.

1. Berechnen Sie I_0 und I_1 .
2. Zeigen Sie, dass $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
3. Folgern Sie daraus, dass die Folge $(I_n)_n$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.
4. Seien u_n und v_n die unten definierten Folgen. Drücken Sie u_n und v_n in Abhängigkeit von I_n aus (wobei zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden ist).

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \quad \text{und} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

5. Folgern Sie daraus die Grenzwerte von $(u_n)_n$ und $(v_n)_n$.

Aufgabe 3 [Integralvergleichskriterium, 2+3+2+3 Punkte]

1. Wir fixieren eine ganze Zahl $p \geq 0$ für die beiden folgenden Aufgaben. Sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\int_{k-1}^k x^p \, dx \leq k^p \leq \int_k^{k+1} x^p \, dx.$$

2. Daraus folgt, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{p+1} n^{p+1} \leq \sum_{k=1}^n k^p \leq \frac{1}{p+1} ((n+1)^{p+1} - 1).$$

3. Sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\int_{k-1}^k \ln x \, dx \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x \, dx.$$

4. Daraus folgt, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \delta_n \quad \text{mit} \quad 1 \leq \delta_n \leq 1 + \ln n.$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch? Wenn dies zutrifft, geben Sie einen sehr kurzen Beweis (~ 2 Zeilen); wenn es falsch ist, geben Sie das einfachste Gegenbeispiel an, das Ihnen einfällt (oder zeichnen Sie eine Skizze) (Für die Beantwortung dieser Frage müssen Sie den Kurs belegt haben)

- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass für alle $c, d \in [a, b]$ gilt $\int_c^d f(x) dx = 0$. Dann gilt für alle $x \in [a, b]$: $f(x) = 0$.
- Das Integral einer Funktion, die auf $[-1, 1]$ durch 1 nach oben beschränkt ist, ist kleiner oder gleich 1.
- Wenn eine stetig Funktion f so ist, dass für alle $x \in [-1, 1]$ gilt $f(x) \leq x^3$, dann ist ihr Integral über $[-1, 1]$ negativ.
- Für jede Stammfunktion F einer auf $[a, b]$ stetigen Funktion f gibt es mindestens ein $q \in [a, b]$, sodass $F(q) = 0$.
- Jede Stammfunktion einer negativen oder nullwertigen Funktion ist fallend.
- Jede stetige Funktion ist die Stammfunktion einer stetigen Funktion.

2. Berechnen Sie folgende Integrale (Für diese Frage dürfen Sie Ihr gesamtes Vorwissen verwenden, einschließlich des Wissens aus der Schulzeit sowie des Wissens, das Sie auf dieser Wikipedia-Seite finden: https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Analysis#Integralrechnung, und https://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle_von_Ableitungs-_und_Stammfunktionen):

- | | |
|--|--|
| • $\int_{-1}^1 x x dx$ | • $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx$ |
| • $\int_0^t \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x dx$ | • $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^x \sin x dx$ (2 Punkte) |
| • $\int_0^t x^2 e^x dx$, für $t \geq 0$ | • $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$ (2 Punkte) |
| • Bestimmen Sie $f(x) = \int_0^1 \max(x, t) dt$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. (2 Punkte) | • $\int_e^{2e} \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx$ (2 Punkte) |

Abgabe: 07.01.2026 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Frage. Finden Sie zwei Funktionen f und g , sodass

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \max(f(x), g(x)) dx = 0.$$

Lösung und Begründung.

Die Bedingung

$$\int_0^1 \max(f(x), g(x)) dx = 0$$

impliziert $\max(f(x), g(x)) = 0$ fast überall, also $f(x) \leq 0$ und $g(x) \leq 0$ fast überall.

Damit gilt $f(x)g(x) \geq 0$ und $f(x)g(x) = 0$ fast überall, sonst wäre $\max(f, g) < 0$ und das Integral negativ.

Folglich

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = 0,$$

was der Forderung $\int_0^1 f(x)g(x) dx = 1$ widerspricht.

Schlussfolgerung: Es existieren keine reellen Funktionen f und g , die beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen.

”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 6

[L^∞ -Norm]

1. Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig und positiv. Zeigen Sie, dass

$$\left(\int_a^b f^n \right)^{1/n} \longrightarrow \sup f \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

2. Für g stetig und strikt positiv auf $[a, b]$ zeigen Sie, dass

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n}$$

konvergiert, und geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe 7

[Ungleichung für das Integral von f^2]

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Man setze $\alpha = \min f$ und $\beta = \max f$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq -\alpha\beta.$$

Aufgabe 8

[Stammfunktion und Induktion]

Für $n \geq 1$ bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion $x \mapsto (\ln x)^n$.

Aufgabe 9

[Bioche-Regel]

Zeigen Sie, dass $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\pi/4 - t)) dt$, und berechnen Sie anschließend

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Aufgabe 10

[Ungleichung von Young]

Sei f eine Funktion, definiert auf $[0, a]$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$), stetig streng wachsend, differenzierbar und deren Ableitung stetig ist, mit $f(0) = 0$. Man bezeichne f^{-1} ihre Umkehrfunktion.

Zeigen Sie, dass für $x \in [0, a]$ gilt:

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x).$$

Machen Sie eine Skizze dazu!

Seien u, v mit $0 \leq u \leq a$ und $0 \leq v \leq f(a)$. Zeigen Sie, dass

$$uv \leq \int_0^u f(t) dt + \int_0^v f^{-1}(t) dt.$$

Anwendung: Zeigen Sie die Ungleichung von Young: Für alle $(p, q) \in]1, +\infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 10

Aufgabe 1

[Umfangslänge des Einheitskreis]

Wir berechnen zunächst die Ableitung $f'(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= (1 - x^2)^{1/2} \\f'(x) &= \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) \\&= \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \\1 + (f'(x))^2 &= 1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2 \\&= 1 + \frac{x^2}{1 - x^2} \\&= \frac{1 - x^2}{1 - x^2} + \frac{x^2}{1 - x^2} \\&= \frac{1}{1 - x^2} \\\Rightarrow L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx \\&= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.\end{aligned}$$

Wir wenden nun Substitution umgekehrt an, indem wir schreiben $x = \sin t$, also $x' = \cos t$ und $t = \arcsin x$. So gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \\&= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} \\&= \frac{1}{|\cos t|} \\\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx &= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \cos t \cdot \frac{1}{|\cos t|} \, dt.\end{aligned}$$

Da $\cos t \geq 0$ für $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [\arcsin(-1), \arcsin(1)]$, ist $|\cos t| = \cos t$, also folgt

$$\begin{aligned}L &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \\&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \frac{1}{\cos t} \, dt \\&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dt \\&= t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\&= \pi.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $2L = 2\pi$, was zu bewiesen war.

Aufgabe 2

[Eine Folge von Integralen]

1.

$$I_0 = \int_0^{\pi/4} 1 \, dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

2. Man bemerkt, dass

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) (1 + \tan^2(x)) \, dx = \left[\frac{1}{n+1} \tan^{n+1}(x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

3. Daraus folgt sofort, dass $I_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$, denn $I_n \geq 0$ (weil $\tan x \geq 0$ für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$) und somit

$$0 \leq I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

4. Die explizite Formel ist schwieriger zu erhalten. Am schnellsten ist es, die Teleskopsumme zu betrachten:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \dots = I_0 - (-1)^n I_{2n}.$$

und

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}.$$

5. Schließlich folgt aus $I_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$, dass

$$v_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \ln 2.$$

Aufgabe 3

[Integralvergleichskriterium]

1. Sei $k \geq 1$ festgelegt. Da die Funktion $y \mapsto y^p$ auf $[0, +\infty]$ wachsend ist, gilt für jedes $x \in [k-1, k]$ die Ungleichung $x \leq k$. Also:

$$\int_{k-1}^k x^p \, dx \leq \int_{k-1}^k k^p \, dx = k^p \cdot 1.$$

Das gleiche Argument liefert die zweite Ungleichung.

2. Durch Summation über k erhält man für $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x^p \, dx \leq \sum_{k=1}^n k^p \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} x^p \, dx.$$

Daraus folgt:

$$\int_0^n x^p \, dx \leq \sum_{k=1}^n k^p \leq \int_1^{n+1} x^p \, dx.$$

Es bleibt zu verwenden, dass eine Stammfunktion von $x \mapsto x^p$ durch $x \mapsto \frac{1}{p+1} x^{p+1}$ gegeben ist, um unmittelbar zu erhalten:

$$\frac{1}{p+1} (n^{p+1} - 0) \leq \sum_{k=1}^n k^p \leq \frac{1}{p+1} ((n+1)^{p+1} - 1).$$

3. Da $y \mapsto \ln y$ ebenfalls wachsend ist, gilt mit dem gleichen Argument wie unter 1.:

$$\int_{k-1}^k \ln x \, dx \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x \, dx$$

4. Beachte, dass

$$\ln(n!) = \ln \left(\prod_{k=2}^n k \right) = \sum_{k=2}^n \ln k.$$

Summiert man die obige Ungleichung (linke Seite) über k , so erhält man für $n \geq 1$:

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln x \, dx \leq \sum_{k=2}^n \ln k.$$

Daraus folgt:

$$\int_1^n \ln x \, dx \leq \ln(n!).$$

Verwendet man, dass eine Stammfunktion von $x \mapsto \ln x$ $x \mapsto x \ln x - x$ ist, erhält man sofort:

$$(n \ln n - n) - (-1) \leq \ln(n!).$$

Um eine obere Schranke zu erhalten, summiert man besser die rechte Ungleichung für k von 1 bis $n-1$ (statt bis n):

$$\ln((n-1)!) \leq \int_1^n \ln x \, dx = n \ln n - n + 1.$$

Addiert man nun $\ln n$ auf beiden Seiten, so erhält man schließlich:

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n \ln n - n + \ln n + 1.$$

Anmerkung: Diese Abschätzung " $\ln(n!) \simeq n \ln n$ " ist in der Informatik sehr nützlich, zum Beispiel bei der Berechnung der algorithmischen Komplexität von Sortierverfahren. Außerdem erhält man durch Exponentiation:

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

was eine gute erste Näherung darstellt. Die Stirling-Formel liefert die beste Näherung:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

- Wahr: Die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ ist eine Stammfunktion, d.h. $F' = f$. Nach der Annahme gilt außerdem $F = 0$, also $F' = 0$.
 - Falsch: $f : [-1, 1] \rightarrow]-\infty, 1]$ mit $f(x) = 1$ für alles $x \in [-1, 1]$ gilt $\int_{-1}^1 f = 2 \cdot 1 = 2 > 1$.
 - Wahr: $\int_{-1}^1 f(x) \, dx \leq \int_{-1}^1 x^3 \, dx = [\frac{1}{4}x^4]_{-1}^1 = 0$.
 - Falsch: $F : x \mapsto x$ ist eine Stammfunktion von $f : x \mapsto 1$ über $[1, 2]$, aber $F(x) \neq 0$ für $x \in [1, 2]$.
 - Wahr: Wenn F eine Stammfunktion von f ist, es gilt $F' = f$. Wenn $f \leq 0$, dann gilt, dass F fallend ist (gemäß dem Kurs über Ableitung).
 - Falsch: $F : x \mapsto |x|$ ist nicht eine Stammfunktion von einer (stetigen) Funktion. Alle Stammfunktionen sind differenzierbar, nicht nur stetig!
- Für $x \in [-1, 0]$, wir haben $x|x| = -x^2$, und für $x \in [0, 1]$, wir haben $x|x| = x^2$, so:

$$\int_{-1}^1 x|x| \, dx = \int_{-1}^0 (-x^2) \, dx + \int_0^1 x^2 \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

- $\left(\frac{x}{e}\right)^x = e^{x \ln x - x}$ und $\ln x = (x \ln x - x)'$, so:

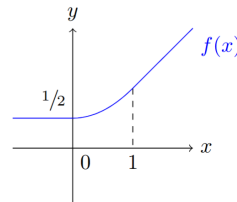
$$\int_0^t \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x \, dx = \int_0^t (x \ln x - x)' e^{x \ln x - x} \, dx = [e^{x \ln x - x}]_0^t = e^{t \ln t - t} - 1 = \left(\frac{t}{e}\right)^t - 1$$

- Partieller Integration: $\int_0^t f g' \, dx = [f g]_0^t - \int_0^t f' g \, dx$, so mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$:

$$\int_0^t x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x]_0^t - 2 \int_0^t x e^x \, dx = t^2 e^t - 2 \left([x e^x]_0^t - \int_0^t e^x \, dx \right) = (t^2 - 2t + 2) e^t - 2$$

•

$$\begin{aligned} \text{Für } x \leq 0, \quad f(x) &= \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}, \\ \text{Für } x \geq 1, \quad f(x) &= \int_0^1 x \, dt = x, \\ \text{Für } x \in [0, 1], \quad f(x) &= \int_0^x x \, dt + \int_x^1 t \, dt = \frac{1}{2}(x^2 + 1). \end{aligned}$$



•

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \, dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 + [\arctan x]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

- Mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = \sin x$ in $I = \int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx$, dann gilt:

$$I = \int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} e^x \cos x \, dx = e^{\pi/3} \sin \frac{\pi}{3} - \left([e^x \cos x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} e^x (-\sin x) \, dx \right) = e^{\pi/3} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \right) + 1 - I$$

So $2I = e^{\pi/3} (\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} + 1)$, es folgt:

$$I = \frac{1}{2} \left(e^{\pi/3} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \right) + 1 \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{\pi/3} + \frac{1}{2} \approx 1.0215 \dots$$

- Mit $u = 1 - x$, dann gilt $dx = -du$ und $x\sqrt{1-x} = (1-u)\sqrt{u}$, so:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx = \int_1^0 (1-u)\sqrt{u} (-du) = \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \, du - \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} \, du = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

- Mit $u = \ln x$, dann gilt $du = \frac{1}{x} dx$, so:

$$\int_e^{2e} \frac{1}{\ln^2 x} \frac{dx}{x} = \int_1^{1+\ln 2} \frac{1}{u^2} \, du = \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{1+\ln 2} = 1 - \frac{1}{1+\ln 2} = \frac{\ln 2}{1+\ln 2} \approx 0.40938 \dots$$

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Mit $f : x \mapsto x - \frac{1}{2}$ und $g = f$ (zeichnen Sie sie über $[0, 1]$!), dann gilt $\int_0^1 \max(f(x), g(x)) \, dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \, dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x]_0^1 = 0 - 0 = 0$, aber $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x]_0^1 = \frac{1}{12}$. Sodass $\sqrt{12} \cdot f$ und $\sqrt{12} \cdot g$ sind Lösungen für die Frage.

Es ist ein Irrtum zu glauben, dass $\int_0^1 h(x) \, dx = 0$ impliziert $h(x) = 0$ für alles $x \in [0, 1]$: Das trifft nur zu, wenn die Funktion h positiv ist!

Aufgabe 6

$[L^\infty\text{-Norm}]$

Sei $M = \sup f$ und

$$u_n = \left(\int_a^b f^n \right)^{1/n}.$$

Da $\forall x, 0 \leq f(x) \leq M$, gilt

$$\int_a^b f^n \leq \int_a^b M^n = (b-a)M^n.$$

Daraus folgt

$$u_n \leq M(b-a)^{1/n}.$$

Sei ferner $\varepsilon > 0$ und c mit $f(c) = M$ (dies existiert, da f stetig auf einem Intervall ist). Sei I ein Intervall um c , auf dem $\forall x \in I, f(x) \geq M - \varepsilon$. Sei η die Länge von I . Dann gilt

$$u_n \geq \eta^{1/n}(M - \varepsilon).$$

Da $\eta^{1/n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow +\infty$, folgt für n hinreichend groß $\eta^{1/n} \geq 1 - \varepsilon$, also ab einem gewissen Rang:

$$u_n \geq (1 - \varepsilon)(M - \varepsilon) \geq M - (M + 1)\varepsilon.$$

Auf ähnliche Weise gilt für $n \rightarrow +\infty$, dass $(b-a)^{1/n} \rightarrow 1$, also ab einem gewissen Rang:

$$u_n \leq M + \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass ab einem gewissen Rang

$$M - (M + 1)\varepsilon \leq u_n \leq M + \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass $u_n \rightarrow M$ für $n \rightarrow +\infty$.

Wir haben bereits das Limit von v_n für $g = 1$ untersucht. Wenn nun g stetig und streng positiv auf $[a, b]$ ist, so ist g beschränkt und erreicht ihre Extremwerte, also $m_g = \min g > 0$ und $M_g = \max g > 0$. Sei zur Klarheit $M_f = \max f$. Dann gilt:

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n} \leq M_g^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} \rightarrow M_f,$$

und

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) dx \right)^{1/n} \geq m_g^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{1/n} \rightarrow M_f.$$

Also gilt $v_n \rightarrow M_f$ für $n \rightarrow +\infty$, unabhängig von g .

Anmerkung: Der erste Teil dieser Aufgabe führt zu einem wichtigen Ergebnis. Man kann die Menge der Funktionen betrachten, für die

$$\left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} < \infty$$

ist (f muss nicht unbedingt auf $[a, b]$ stetig sein, sondern z.B. nur auf $]a, b[$). Diese Menge bildet einen Vektorraum (was nicht offensichtlich ist), den Raum L^p , dem man eine Distanz geben kann, die L^p -Norm, definiert durch

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}.$$

Die obige Gleichung zeigt, dass der Raum L^∞ als Raum der beschränkten Funktionen interpretiert werden kann.

Aufgabe 7

[Ungleichung für das Integral von f^2]

Es gibt viele mögliche Ansätze zu dieser Aufgabe. Alle sind interessant zu untersuchen, aber nur wenige führen zur Lösung. Betrachten wir folgendes Integral:

$$\int_0^1 (f(t) - \alpha)(f(t) - \beta) dt = \int_0^1 f^2 - (\alpha + \beta) \int_0^1 f + \alpha\beta = \int_0^1 f^2 + \alpha\beta.$$

Da $\alpha \leq f(t) \leq \beta$, gilt $(f(t) - \alpha)(f(t) - \beta) \leq 0$ nach Definition von α und β , also folgt

$$\int_0^1 f^2 \leq -\alpha\beta.$$

Aufgabe 8

[Stammfunktion und Induktion]

Partielle Integration:

$$\int \ln^n x dx = [x \ln^n x] - n \int \ln^{n-1} x dx.$$

Tatsächlich gilt:

$$\int \ln^n x dx = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{[x \ln^{n-k} x]}{(n-k)!}.$$

Aufgabe 9

[Bioche-Regel]

Man führt die bijektive Variablenänderung $u = \frac{\pi}{4} - t$ (d.h. $du = -dt$) ein:

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt = - \int_{\pi/4}^0 \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - u \right) du = \int_0^{\pi/4} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - u \right) du.$$

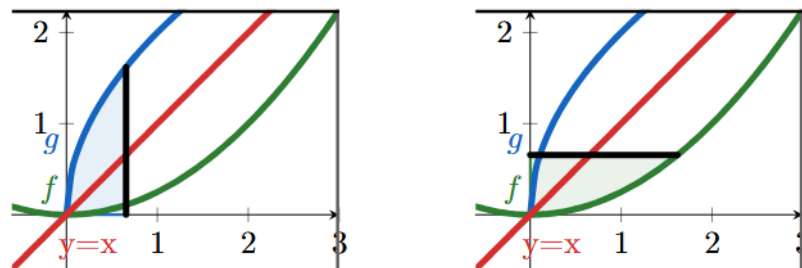
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt &= \int_0^{\pi/4} \left(\ln(\sin t + \cos t) - \ln \cos t \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\ln(\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - t)) - \ln \cos t \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \ln 2 dt + \int_0^{\pi/4} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right) dt - \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{8} \ln 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 10

[Ungleichung von Young]

Es sei angemerkt, dass f^{-1} tatsächlich stetig ist (siehe Vorlesung zur Stetigkeit), also sind die geforderten Rechnungen gültig. Man erkennt die Gleichheit der blauen und grünen Flächen in der Abbildung durch Symmetrie ($g = f^{-1}$ und $a = 3$):



Die blaue Fläche beträgt $\int_0^{f(x)} g$, daher erhält man sofort die erste Gleichung:

$$\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x).$$

Zeigen wir dies durch Rechnung.

Wir setzen F als eine Stammfunktion von f , die bei 0 verschwindet, $\tilde{F}$ als Stammfunktion von f^{-1} (Achtung: dies ist keinesfalls F^{-1} , und F muss nicht bijektiv sein), und

$$G : x \mapsto \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt.$$

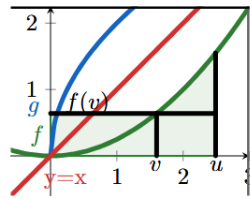
G ist wohldefiniert und differenzierbar mit:

$$G(x) = F(x) + \tilde{F}(f(x)), \quad \text{also} \quad G'(x) = F'(x) + \tilde{F}'(f(x)) = f(x) + f(x) \cdot f^{-1}(f(x)) = f(x) + xf'(x).$$

Man erkennt, dass dies dieselbe Ableitung ist wie bei $x \mapsto xf(x)$, und sie stimmen bei 0 überein.

Angenommen $f^{-1}(v) \leq u$, dann folgt die Ungleichung (erkennbar in der Abbildung) aus der Monotonie von f :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = vf^{-1}(v) + \int_{f^{-1}(v)}^u f \geq vf^{-1}(v) + v(u - f^{-1}(v)) = uv.$$



Angenommen $v \geq f(u)$, dann folgt die Ungleichung (erkennbar in der Abbildung) aus der Monotonie von f^{-1} :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = uf(u) + \int_{f(u)}^v f^{-1} \geq uf(u) + u(v - f(u)) = uv.$$

Man setze $f : t \mapsto t^{p-1}$ und $g : x \mapsto x^{q-1}$. Dann gilt $g(f(t)) = g(t^{p-1}) = t^{(p-1)(q-1)} = t$. Denn $1/p + 1/q = (p+q)/(pq)$, also nach Voraussetzung $pq = p+q$. Schließlich: $g = f^{-1}$.

Durch Anwendung der vorherigen Ungleichung erhält man die Young-Ungleichung:

$$uv \leq \int_0^u t^{p-1} dt + \int_0^v t^{q-1} dt = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 11

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Zu viele Mittelpunkte, 10 Punkte]

Seien $A_1, \dots, A_n$ n Punkte in der Ebene (d. h. in $\mathbb{R}^2$). Unter welchen Bedingungen existieren Punkte $M_1, \dots, M_n$, so dass A_i der Mittelpunkt der Strecke zwischen M_i und M_{i+1} ist für $i \in \{1, \dots, n-1\}$, und A_n der Mittelpunkt der Strecke zwischen M_n und M_1 ist? Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an.

Aufgabe 2

[Mit Polynomen, 5+5 Punkte]

Wir wollen alle Polynome $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ bestimmen, die $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ und $P(2) = 1$ erfüllen.

1. Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem für die Variablen a, b, c, d . Wie viele Gleichungen und wie viele Unbekannte hat es? Welche Dimension erwarten Sie für den Lösungsraum?
2. Lösen Sie das System und folgern Sie daraus: Geben Sie die Menge aller Polynome vom Grad höchstens 3 an, die $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ und $P(2) = 1$ erfüllen.

Aufgabe 3

[Von Vektoren erzeugte Unterräume, 5+5 Punkte]

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren $a = (1, 2, 3)$ und $b = (2, -1, 1)$ denselben Vektorraum (als Unterraum von $\mathbb{R}^3$) erzeugen wie die Vektoren $c = (1, 0, 1)$ und $d = (0, 1, 1)$.
2. Sei F der von den Vektoren $u = (1, 2, -5, 3)$ und $v = (2, -1, 4, 7)$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die möglichen Werte von λ und μ , so dass der Vektor $w = (\lambda, \mu, -37, -3)$ zu F gehört.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch? Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen (Für die Beantwortung dieser Frage müssen Sie den Kurs belegt haben):
 - Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten kann keine Lösung haben, wenn $n > m$.
 - Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten muss eine Lösung haben, wenn $n < m$.
 - Wenn ein lineares Gleichungssystem mit genau 1 Lösung rationale Koeffizienten hat, dann ist seine Lösung rationale Zahlen.
 - Die Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems hängt nicht vom Wert der rechten Seite ab.
 - Wenn ein lineares Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat, dann ist mindestens eine Variable in dieser Lösung ungleich 0.
 - Das Vertauschen zweier Zeilen eines linearen Gleichungssystems beeinflusst den Lösungsraum nicht.
 - Das Eliminieren einer Variablen in einem (lösbaren) linearen Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten erfordert höchstens $(n-1) \cdot (m+1)$ Additionen und $(n-1) \cdot (m+1)$ Multiplikationen.
 - Befindet sich ein lösbares lineares Gleichungssystem in Dreiecksform, so ist die Dimension des Lösungsraums gleich der Anzahl der Variablen minus der Anzahl der Nullen auf der Diagonale.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme (**2 Punkte** für jede):

$$\begin{aligned} &\bullet \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases} \\ &\bullet \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \\ &\bullet \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Abgabe: 14.01.2026 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Frage: Finde 5 Vektoren in $\mathbb{R}^3$, sodass jede Teilmenge von 3 Vektoren linear unabhängig ist, mit Ausnahme genau einer Teilmenge.

Lösung:

Wir wählen die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 0), \quad v_4 = (0, 0, 1), \quad v_5 = (1, 1, 1).$$

Erläuterung:

- Die einzige linear abhängige Teilmenge der Größe 3 ist (v_1, v_2, v_3) , da $v_3 = v_1 + v_2$.
- Jede andere Teilmenge von 3 Vektoren ist linear unabhängig.
- ”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 6

[Nicht linear System]

Lösen Sie das folgende System, wobei x , y und z positive reelle Zahlen sind:

$$\begin{cases} x^3 y^2 z^6 = 1, \\ x^4 y^5 z^{12} = 2, \\ x^2 y^2 z^5 = 3. \end{cases}$$

Hinweis: $\ln x^a = a \ln x$

Aufgabe 7

[Partialbruchzerlegung]

Sei

$$f(x) = \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}, \quad x \in]1, +\infty[.$$

1. Zeigen Sie, dass es drei reelle Zahlen a , b und c gibt, so dass für alle $x \in]1, +\infty[$ gilt:

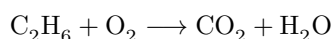
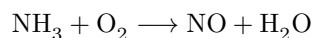
$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. Leiten Sie daraus eine Stammfunktion von f auf $]1, +\infty[$ her, die sich in $x = 2$ auf null ergibt.

Aufgabe 8

[chemischen Gleichungen]

Gleichgewicht der folgenden chemischen Gleichungen:



Aufgabe 9

[Mit ein Parameter]

Löse das folgende System, wobei man den Wert des Parameters m diskutiert:

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 10

[Similar Systemen?]

Löse die beiden folgenden Systeme. Beachte, wie unterschiedlich die Lösungen sind!

$$\begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ x + 10y + 5z = 40 \\ x + 9y + z = -50 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ x + 10y + 5z = 41 \\ x + 9y + z = -50 \end{cases}$$

Aufgabe 11

[Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$]

Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$, in dem sie enthalten sind, und welche nicht?

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 2\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = 2z = 4t\}$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$$

$$E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

$$E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$$

$$E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$$

$$E_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x + 3y - 5z)^2 + (x - y + z)^2 = 0\}.$$

Aufgabe 12

[Erzeugendensystem]

Finde ein Erzeugendensystem der folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^3$:

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$
2. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0 \text{ und } 2x - y - z = 0\}$

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 11

Aufgabe 1

[Zu viele Mittelpunkte]

Man bezeichnet mit a_k die Affixe (b.z. das Vektor $\in \mathbb{R}^2$) der Punkte A_k und mit m_k diejenigen der Punkte M_k . Man kann das entsprechende System schreiben als

$$m_n + m_1 = 2a_n \quad \text{und} \quad m_k + m_{k+1} = 2a_k.$$

Also gilt

$$z_{k+1} = -z_k + 2a_k,$$

und damit

$$z_n = 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} a_j.$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung erhält man somit:

$$2 \sum_k (-1)^{n-k} a_k = (1 - (-1)^n) z_1.$$

Es ergeben sich daher zwei Möglichkeiten: Ist n ungerade, so erhält man einen expliziten Wert für z_1 und damit für alle übrigen z_k .

Ist n gerade, so muss

$$\sum_k (-1)^k a_k = 0$$

gelten. Ist dies der Fall, so erhält man ein System mit $n - 1$ Gleichungen, das bereits gelöst wurde. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen.

Man bemerkt, dass in diesem Fall das System der Punkte A_k im Ursprung zentriert ist.

Aufgabe 2

[Mit Polynomen]

1. Schreiben wir $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, so lassen sich die gegebenen Bedingungen wie folgt formulieren:

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 1, \\ a + b + c + d = 0, \\ 8a + 4b + 2c + d = 1. \end{cases}$$

Wir haben eine freie Variable, so wir glauben $\dim = 1$.

2. Durch Gaußsches Eliminationsverfahren erhält man:

$$\begin{cases} b = -a - \frac{1}{2}, \\ c = -2a + \frac{1}{2}, \\ d = 2a. \end{cases}$$

Schließlich ist die Menge aller Polynome P , die die Bedingungen $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ und $P(2) = 1$ erfüllen, gegeben durch

$$\left\{ aX^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right) X^2 - \left(2a - \frac{1}{2}\right) X + 2a \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3

[Von Vektoren erzeugte Unterräume]

1. Es genügt zu zeigen, dass $c \in \text{span}(a, b)$ und $d \in \text{span}(a, b)$ gilt, um $\text{span}(c, d) \subset \text{span}(a, b)$ zu erhalten. Anschließend zeigt man $\text{span}(a, b) \subset \text{span}(c, d)$. Man erhält schnell:

$$a = c + 2d \quad \text{und} \quad b = 2c - d.$$

Daraus folgt $\text{span}(a, b) \subset \text{span}(c, d)$. Umgekehrt kann man c und d linear in Abhängigkeit von a und b ausdrücken, indem man das System

$$\begin{cases} c + 2d = a, \\ 2c - d = b \end{cases}$$

löst. Man erhält

$$c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \quad \text{und} \quad d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b.$$

Um zu zeigen, dass $c \in \text{span}(a, b)$ gilt, kann man auch direkt x, y suchen, so dass $c = xa + yb$. Dies führt auf das lineare System

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x - y = 0, \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

Man findet $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{2}{5}$ (wobei zu überprüfen ist, dass alle drei Gleichungen erfüllt sind). Damit gilt tatsächlich $c \in \text{span}(a, b)$. Analog kann man für die drei übrigen Zugehörigkeiten verfahren.

2. Wir argumentieren mittels Analyse–Synthese. Angenommen, es existieren λ, μ mit $w = (\lambda, \mu, -37, -3) \in F$. Dann gibt es x und y mit

$$w = xu + yv.$$

Insbesondere erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} -5x + 4y = -37, \\ 3x + 7y = -3. \end{cases}$$

Man findet:

$$x = \frac{247}{47} \quad \text{und} \quad y = -\frac{126}{47},$$

und damit

$$\lambda = x + 2y = -\frac{5}{47} \quad \text{sowie} \quad \mu = 2x - y = \frac{620}{47}.$$

Umgekehrt garantieren die obigen Werte, dass

$$(\lambda, \mu, -37, -3) = xu + yv,$$

also gilt $(\lambda, \mu, -37, -3) \in F$.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1.
 - Falsch ($x_1 = 0, \quad x_1 = 0$) hat $n = 2, m = 1$.
 - Falsch ($x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$) hat $n = 2, m = 3$.
 - Wahr
 - Falsch ($x_1 = 0, \quad x_1 = 1$) und ($x_1 = 0, \quad x_1 = 0$).
 - Falsch ($x_1 = 0$)
 - Wahr
 - Wahr
 - Falsch, es ist gleich nur der Anzahl der Nullen auf der Diagonale.

2. • Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & -3 & 0 & 3 & 8 & -3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & \\ \rightarrow & 0 & 1 & 0 & -1 & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Es gibt genau eine Lösung, nämlich $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 0)$. Die Lösungsmenge ist also $\{(1, -1, 0)\}$.

- Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -4 & 2 & -1 & 1 & -4 & 2 & -1 & 1 & -4 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -3 & 3 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & -2 & 1 & 4 & 0 & 18 & -9 & 9 & 0 & 18 & -9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Es gibt unendliche viele Lösungen. Wir setzen $x_3 = 2t$ und sehen, dass die Lösungsmenge durch $\{(1, \frac{1}{2} + t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ gegeben ist.

- Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösungen da $0 \neq 2$, also ist die Lösungsmenge die leere Menge.

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

$$v_3 + v_4 = v_5$$

Aufgabe 6

[Nicht linear System]

Wir setzen $a = \ln x$, $b = \ln y$ und $c = \ln z$ und bezeichnen das System mit (S). Da die Logarithmusfunktion injektiv ist, gilt:

$$(S) \iff \begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0 \\ 4a + 5b + 12c = \ln 2 \\ 2a + 2b + 5c = \ln 3 \end{cases}$$

Durch geeignete Umformungen erhalten wir:

$$\begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0 \\ 7b + 12c = 3 \ln 2 \\ 2b + 3c = 3 \ln 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0 \\ 7b + 12c = 3 \ln 2 \\ -3c = 3 \ln 3 - 6 \ln 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 \ln 2 + 6 \ln 3 \\ b = -3 \ln 2 + 12 \ln 3 \\ c = 2 \ln 2 - 7 \ln 3 \end{cases}$$

Daraus folgt die eindeutige Lösung:

$$\begin{cases} x = 2^{-2}3^6 \\ y = 2^{-3}3^{12} \\ z = 2^23^{-7} \end{cases}$$

Aufgabe 7

[Partialbruchzerlegung]

Man kann alles auf denselben Nenner bringen und durch Koeffizientenvergleich vorgehen. Es gilt:

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} = \frac{a(x+3)^2 + b(x-1)(x+3) + c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{x^2(a+b) + x(6a+2b+c) + (9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}$$

Die geforderte Gleichheit wird erfüllt, sobald gilt:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 6a+2b+c=21 \\ 9a-3b-c=22 \end{cases}$$

Wir lösen das System, zunächst durch Bemerkung $a = 5 - b$, und erhalten sukzessive:

$$\begin{cases} a = 5 - b \\ c = -9 + 4b \\ -16b = -32 \end{cases}$$

Schließlich ergibt sich die eindeutige Lösung:

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c = -1$$

Also gilt:

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + 2(x+3) - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

Wir integrieren nun die einzelnen Terme der Partialbruchzerlegung auf dem Intervall $]1, +\infty[$. Die Stammfunktionen von f auf diesem Intervall sind daher:

$$F(x) = 3 \ln(x-1) + 2 \ln(x+3) + \frac{1}{x+3} + d.$$

Die Stammfunktion, die in $x = 2$ verschwindet, erhält man durch die Bedingung

$$3 \ln 1 + 2 \ln 5 + \frac{1}{5} + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2 \ln 5 - \frac{1}{5}.$$

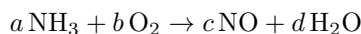
Die Stammfunktion von f auf $]1, +\infty[$, die in 2 verschwindet, ist daher:

$$F(x) = 3 \ln(x-1) + 2 \ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2 \ln 5 - \frac{1}{5}.$$

Aufgabe 8

[chemischen Gleichungen]

Es gilt, a , b , c und d so zu finden, dass die Anzahl der Atome jedes Elements auf beiden Seiten der Gleichung



gleich ist. Die reellen Zahlen a, b, c, d müssen folgendes System erfüllen:

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ 3a - 2d = 0 \\ 2b - c - d = 0 \end{cases}$$

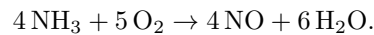
Wir lösen das System:

$$a = \frac{2d}{3}, \quad c = \frac{2d}{3}, \quad b = \frac{5d}{6}.$$

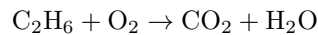
Da wir eine ganzzahlige Lösung suchen, wählen wir $d = 6$ und erhalten:

$$a = 4, \quad b = 5, \quad c = 4, \quad d = 6.$$

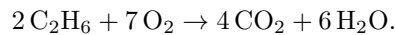
Die ausgeglichene chemische Reaktion lautet also:



Auf die gleiche Weise kann man die Reaktion



ausgleichen und erhält:



Aufgabe 9

[Mit ein Parameter]

Wir verwenden die erweiterte Matrix des Systems:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 - L_1 \rightarrow L_2, \quad L_3 - mL_1 \rightarrow L_3 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 0 \end{array} \right)$$

Wir unterscheiden den ersten Fall $m = 1$. Dann sind die beiden letzten Zeilen null und das System ist äquivalent zu $x + y + z = 0$. Die Lösungsmenge ist

$$\{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Für $m \neq 1$ können wir die zweite und dritte Zeile durch $1/(m-1)$ multiplizieren und erhalten das äquivalente System:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -m-1 & 0 \end{array} \right), \quad L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -m-2 & 0 \end{array} \right).$$

Ist $m = -2$, so ist das System äquivalent zu

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Lösungsmenge } \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Für $m \neq -2$ (und weiterhin $m \neq 1$) ist das System äquivalent zu

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{eindeutige Lösung } (0, 0, 0).$$

Aufgabe 10

[Similar Systemen?]

Wir lösen das erste System mit der Gaußschen Pivot-Methode. Sei (S) dieses System, dann gilt:

$$(S) \iff \begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ -35y - 76z = -1580 & (L_2 - 9L_1) \\ -41y - 89z = -1850 & (L_3 - 10L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ -35y - 76z = -1580 \\ z = 30 & (35L_3 - 42L_2) \end{cases}$$

Man erhält leicht, dass das System eine eindeutige Lösung hat: $(x, y, z) = (10, -20, 30)$.

Die Lösung des anderen Systems verläuft sehr ähnlich und ergibt die eindeutige Lösung $(-66, 69, -11)$. Zwei sehr ähnliche Systeme können also sehr unterschiedliche Lösungen haben. Man sagt, das System sei schlecht konditioniert.

Aufgabe 11[Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$]

Seien $X = (x, y, z)$ und $X' = (x', y', z')$ Elemente von E_1 . Dann gilt $X + X' = (x + x', y + y', z + z') \in E_1$, da

$$(x + x') + (y + y') + 3(z + z') = (x + y + 3z) + (x' + y' + 3z') = 0.$$

Ebenso gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E_1$, da $\lambda x + \lambda y + 3\lambda z = \lambda(x + y + 3z) = 0$. Somit ist E_1 ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

E_2 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$, da $\vec{0} = (0, 0, 0) \notin E_2$.

Seien $X = (x, y, z, t)$ und $X' = (x', y', z', t')$ Elemente von E_3 . Dann gilt $X + X' = (x + x', y + y', z + z', t + t') \in E_3$, da

$$x + x' = y + y' = 2(z + z') = 4(t + t').$$

Ebenso zeigt man, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X \in E_3$. Somit ist E_3 ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

E_4 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, da es nicht unter Addition abgeschlossen ist: $X = (1, 0), Y = (0, 1) \in E_4$, aber $X + Y = (1, 1) \notin E_4$.

Die Elemente $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ gehören zu E_5 . Ihre Summe $(0, 2) \notin E_5$, also ist E_5 kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Allgemein ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ entweder eine Gerade durch $(0, 0)$, $\mathbb{R}^2$ selbst oder die Menge $\{(0, 0)\}$. E_5 ist jedoch eine Parabel und somit kein Unterraum.

Sei $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\}$ und $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Wie bei der ersten Frage zeigt man, dass F und G Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind. Somit ist auch ihre Schnittmenge $F \cap G$ ein Unterraum.

Eine Vereinigung zweier Unterräume ist im Allgemeinen kein Unterraum. Zum Beispiel: $(5, 0, 2) \in F \subset F \cup G$ und $(1, 1, 0) \in G \subset F \cup G$, aber

$$(5, 0, 2) + (1, 1, 0) = (6, 1, 2) \notin F \text{ und } \notin G.$$

Daher ist $F \cup G$ nicht unter Addition abgeschlossen und somit kein Unterraum. Allgemein gilt: Die Vereinigung zweier Unterräume ist genau dann ein Unterraum, wenn der eine im anderen enthalten ist.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$. Somit gilt

$$(x, y, z) \in E_8 \iff 2x + 3y - 5z = 0 \text{ und } x - y + z = 0 \iff (x, y, z) \in E_6.$$

Daher ist E_8 ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 12

[Erzeugendensystem]

1. Wir haben:

$$(x, y, z) \in F \iff x = -2y + z \iff \begin{cases} x = y \cdot (-2) + z \cdot 1 \\ y = y \cdot 1 + z \cdot 0 \\ z = y \cdot 0 + z \cdot 1 \end{cases}$$

Setzt man $u_1 = (-2, 1, 0)$ und $u_2 = (1, 0, 1)$, so gilt:

$$F = \text{span}(u_1, u_2).$$

Diese Lösung ist natürlich nicht eindeutig.

2. Weiter gilt:

$$(x, y, z) \in G \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \\ z = z \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$G = \text{span}(u), \quad \text{mit } u = (2, 3, 1).$$

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 12

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Span, 5+5 Punkte]

1. Berechnen Sie $\dim \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ für

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Existiert $v_5 \in \mathbb{R}^4$, sodass $v_5 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$? Falls ja, ist dieser Vektor eindeutig bestimmt? Falls es existiert, geben Sie den bzw. einen solchen Vektor v_5 an. Ist die Familie $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

[Das andere Produkt?, 10 Punkte]

Sei A eine 3×2 -Matrix und B eine 2×3 -Matrix, so dass $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie BA .

Aufgabe 3

[Matrizenvampire, 2+3+2+3 Punkte]

1. Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2$.
2. Für eine Ziffer $a \in \{0, 1, \dots, 9\}$ bezeichnen wir mit $\overline{aa}$ die zweistellige Zahl, deren beide Ziffern gleich a sind. Zeigen Sie, dass eine Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für Ziffern $a, b, c, d \in \{0, \dots, 9\}$ dann

$$M^2 = \begin{pmatrix} \overline{aa} & \overline{bb} \\ \overline{cc} & \overline{dd} \end{pmatrix}$$

erfüllt, wenn $ad - bc = 0$ und $a + d = 11$.

3. Untersuchen Sie die Umkehrung.
4. Wie kann man analog mit zweistelligen Einträgen verfahren? Nennen Sie ein Beispiel für eine solche Matrix.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch? Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen (Für die Beantwortung dieser Frage müssen Sie den Kurs belegt haben):
- Die Menge aller reellen invertierbaren $n \times n$ Matrizen ist ein Untervektorraum des Vektorraums der reellen $n \times n$ Matrizen.
 - Gegeben eine reelle $n \times n$ Matrix A und einen Vektor $b_1 \in \mathbb{R}^n$, falls $Ax = b_1$ eine Lösung hat, hat auch $Ax = b_2$ eine Lösung für einen beliebigen Vektor $b_2 \in \mathbb{R}^n$.
 - Gegeben eine Familie von Vektoren $(v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$, falls kein Vektor ein Vielfaches von einem anderen Vektor ist, ist die Familie linear unabhängig.
 - Es gibt zwei rechteckige Matrizen A und B , sodass $AB = 0$, aber $BA \neq 0$.
2. Bestimmen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar oder singular sind. Wenn die Matrix invertierbar ist, bestimmen Sie die Inverse (**2 Punkte** für jede).

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\bullet C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet D = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Familien von Vektoren linear unabhängig sind oder nicht:

- $((2, i, 4, -i); (i, -1, -i, 1); (0, 3, -i, 1))$ als Vektoren in $\mathbb{C}^4$.
- (f_a, f_b, f_c) , wobei $f_u : x \mapsto \sin(x + u)$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, als Vektoren aus dem Raum aller stetigen Funktionen in $\mathbb{R}$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, wobei $f_n : x \mapsto nx + n^2 + 1$, als Vektoren aus dem Raum aller stetigen Funktionen in $\mathbb{R}$. (**2 Punkte**)

4. Berechnen Sie jeweils das Produkt AB oder begründen Sie, warum es nicht wohldefiniert ist:

$$\bullet A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 9 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Abgabe: 21.01.2026 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Wir betrachten eine ganzzahlige 2×2 -Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit der Forderung

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad a, b, c, d \neq 1.$$

Zunächst folgt aus $M^3 = (m_{ij}^2)$, dass jede Eintragung von M eine Nullstelle ihres eigenen Quadrats ist. Für jede ganze Zahl x gilt jedoch $x^3 = x^2$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $x = 1$. Da die Werte 1 ausgeschlossen sind, bleibt nur $x = 0$.

Somit müssen alle Einträge von M gleich 0 sein. Setzen wir

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so erhält man tatsächlich

$$M^3 = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^2 & 0^2 \\ 0^2 & 0^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die Nullmatrix die einzige ganzzahlige Lösung der gegebenen Bedingung ist.
„

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 6

[Umkehrung einer Summationsbeziehung]

Sei d fest und seien $(f_i)_i$ und $(h_j)_j$ zwei Familien komplexer Zahlen. Beweisen Sie (wobei $\binom{b}{a}$ für $a < b$ als null gesetzt wird):

$$\forall i, \quad f_i = \sum_{j=1}^d \binom{i}{j} h_j \iff \forall j, \quad h_j = \sum_{i=1}^d (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i.$$

Aufgabe 7

[Satz von Hadamard]

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, falls $\forall i, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Aufgabe 8

[Diagonalisierung]

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Werte $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $A - \lambda I_4$ singulär ist, und lösen Sie dann die Gleichung $AX = \lambda X$.

Leiten Sie daraus eine invertierbare Matrix P her, so dass $A = PDP^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix D gilt.

Aufgabe 9

[Inverse Berechnung]

In der Vorlesung wurde behauptet, dass die Inverse einer invertierbaren $n \times n$ Matrix A bestimmt werden kann, indem Man das Gleichungssystem assoziiert mit der erweiterten Matrix $(A|I_n)$ löst. Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus richtig ist: D.h. beweisen Sie, dass durch Reihenoperationen die Matrix $(A|I_n)$ auf die Form $(I_n|B)$ gebracht werden kann, und dass $AB = BA = I_n$.

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 12

Aufgabe 1

[Span]

1. Wir bringen die Matrix mit Spaltenvektoren v_1, v_2, v_3, v_4 auf die spezielle Dreiecksform (Satz 10.7):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 11 & -8 \\ 0 & 7 & -12 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 11 & -8 \\ 0 & 7 & -12 & 7 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weil wir dreimal 1 am Diagonal haben, ist $\dim \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$.

2. Da $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ existieren Vektoren $v_5 \in \mathbb{R}^4$ mit $v_5 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und zwar existieren unendlich solche Vektoren. Zum Beispiel könnte man $v_5 = (0, 0, 0, 1)$ nehmen, um ein Erzeugendensystem zu bekommen (überprüfen: $\dim \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = 4$).

Aufgabe 2

[Das andere Produkt?]

Wir bezeichnen mit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die linearen Abbildungen, die zu A bzw. B gehören. Man weiß, dass

$$f(g(e_2)) = e_2 \quad \text{und} \quad f(g(e_3)) = e_3.$$

Folglich gilt

$$g(f(g(e_2))) = g(e_2).$$

Ebenso erhält man

$$g(f(g(e_3))) = g(e_3).$$

Also lässt gf die Familie $(g(e_2), g(e_3))$ unverändert. Diese Familie ist jedoch eine Basis; denn wenn

$$a g(e_2) + b g(e_3) = \vec{0},$$

so erhält man durch Anwenden von f

$$a e_2 + b e_3 = \vec{0},$$

also $a = b = 0$, da (e_2, e_3) linear unabhängig ist.

Damit lässt der Endomorphismus gf eine Basis unverändert: er ist die Identität. Daraus folgt

$$BA = I_2.$$

Aufgabe 3

[Matrizenvampire]

- 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

Man amüsiert sich, wie man kann...

2. (Für diejenigen, die die Theorie des charakteristischen Polynoms kennen: wir sagen einfach, dass für M , $\chi(M) = X^2 - 11X + 0$, also dass $M^2 = 11M$ gilt. Nun ist $11x = xx$. Man könnte genauso mit Zwei-Ziffern-Einträgen in M verfahren, dann wäre $M^2 = 101M$.)

Wir haben:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir den ersten Eintrag:

$$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a + d) = 11a.$$

Ebenso:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + ad & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{pmatrix} = 11M.$$

3. Umgekehrt, sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

so dass $M^2 = 11M$. Wir setzen $\Delta = ad - bc$ und $t = a + d$. Wir wollen zeigen, dass $\Delta = 0$ und $t = 11$ gilt. Eine kurze Rechnung ergibt $bc = \Delta - ad$, dann:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - \Delta & bt \\ ct & dt - \Delta \end{pmatrix}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt schließlich $\Delta = 0$ und $t = 11$.

4. Wenn man eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{ab} & \overline{cd} \\ \overline{ef} & \overline{gh} \end{pmatrix}$$

finden möchte, so dass

$$M^2 = \begin{pmatrix} \overline{abab} & \overline{cdcd} \\ \overline{efef} & \overline{ghgh} \end{pmatrix},$$

gilt, dann ist dies genau dann der Fall, wenn $\Delta = xt - zy = 0$ und $\tau = x + t = 101$.

Zum Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 66 & 55 \\ 42 & 35 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6666 & 5555 \\ 4242 & 3535 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

- Falsch: I_n und $-I_n$ sind invertierbare $n \times n$ Matrizen, aber $I_n + (-I_n)$ ist die Nullmatrix, was nicht invertierbar ist.
 - Falsch: Für A die Nullmatrix und b_1 der Nullvektor gilt $Ax = b_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, aber $Ax = b_2$ hat keine Lösungen für alle anderen Vektoren $b_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{b_1\}$.
 - Falsch: Wenn irgendeine nicht triviale lineare Kombination von den Vektoren existiert, sodass $\sum_{i=1}^k c_i v_i = 0$, ist die Familie linear abhängig. Zum Beispiel nehmen wir $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Dann sind keine Vektoren Vielfache voneinander, aber $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, also ist die Familie linear abhängig.

- Wahr: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, oder $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B \Rightarrow$.

- A ist invertierbar, denn

$$\begin{aligned} (A|I_2) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 15 & 20 & 5 & 0 \\ 15 & 18 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 15 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 15 & 0 & -45 & 30 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Die zweite Spalte der Matrix B ist gleich -2 mal der ersten, daher ist diese Matrix singulär.

- C ist nicht invertierbar, denn

$$(C|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right). \text{ Weil wir links eine Nullreihe haben, ist } D \text{ nicht invertierbar.}$$

- D ist invertierbar, denn

$$(D|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{3} & -\frac{8}{3} & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 9 & 3 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 9 & 3 \end{array} \right), \quad D^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 4 & -5 & -2 \\ 5 & -6 & -2 \\ -8 & 9 & 3 \end{array} \right).$$

- Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ so, dass $au + bv + cw = \vec{0}$, wobei u, v, w die im Aufgabentext gegebenen Vektoren aus $\mathbb{C}^4$ bezeichnen. Man erhält ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 3 Unbekannten; es bleibt zu zeigen, dass dieses System unverträglich ist. Durch Addition der zweiten und vierten Gleichung erhält man $c = 0$, anschließend liefert die Addition der ersten und dritten Gleichung $a = 0$, woraus schließlich $b = 0$ folgt. Die Familie ist also linear unabhängig.
 - Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ die Funktionen $\cos$ bzw. $\sin$. Dann gilt $f_u = (\cos u) \vec{x} + (\sin u) \vec{y}$. Damit sind f_a, f_b und f_c drei Vektoren, die Linearkombinationen von nur zwei Vektoren sind; sie bilden also eine linear abhängige Familie.
 - Die Funktionen f_0, f_1 und f_2 sind Linearkombinationen der beiden Funktionen $x \mapsto 1$ und $x \mapsto x$. Daher ist die Familie (f_0, f_1, f_2) linear abhängig, und folglich ist auch die Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ als Obermenge einer linear abhängigen Familie ebenfalls linear abhängig.
-

$$AB = \begin{pmatrix} (-6)(-3) + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 6 & (-6) \cdot 6 + 2 \cdot (-1) + (-1)(-1) \\ 8 & -37 \end{pmatrix}$$

•

$$AB = \begin{pmatrix} (-5)(-4) + 5 \cdot 9 + (-1) \cdot 7 & (-5) \cdot 1 + 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot -6 & (-5) \cdot 2 + 5 \cdot 0 + (-1)(-1) \\ (-2)(-4) + 2 \cdot 9 + (-2) \cdot 7 & (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot -6 & (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-2)(-1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 58 & -14 & -9 \\ 12 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- Das Produkt AB existiert nicht, denn A hat 3 Spalten und B hat 2 Reihen.

Aufgabe 5

[MitChatGPT]

Der Befund (dass die Nullmatrix die einzige Lösung des Problems ist) ist korrekt, aber die zuvor gegebene Begründung ist falsch. Die Ausgangsgleichung impliziert nämlich nicht $m_{ij}^3 = m_{ij}^2$. Um

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$$

zu lösen, muss man zunächst

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^3 + 2abc + bcd & b(a^2 + ad + bc + d^2) \\ c(a^2 + ad + bc + d^2) & abc + 2bcd + d^3 \end{pmatrix}$$

ausrechnen. Insbesondere liefert der Eintrag oben rechts $b(a^2 + ad + bc + d^2) = b^2$. Woraus wir $b = 0$ oder $b = a^2 + ad + bc + d^2$ erhalten. Darauf folgt eine lange Argumentation, die schließlich zeigt, dass $b = 0$ die eindeutige Lösung ist. Dasselbe gilt für c , also ist $c = 0$. Folglich ist M eine Diagonalmatrix,

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{ und daher } M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & d^3 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man das Argument anwenden, dass aus $x^3 = x^2$ folgt, dass $x \in \{0, 1\}$, und erhält schließlich

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

[Umkehrung einer Summationsbeziehung]

Man erinnert sich an die klassische Formel (für $i \leq j$):

$$\binom{k}{i} \binom{j}{k} = \frac{1}{i!(k-i)!} \frac{j!}{(j-k)!} = \binom{j}{i} \binom{j-i}{k-i}.$$

Die vorgeschlagene Äquivalenz bedeutet, dass die Matrizen

$$A = \left[\binom{j}{i} \right]_{i,j} \quad \text{und} \quad B = \left[(-1)^{i+j} \binom{j}{i} \right]_{i,j}$$

inverse zueinander sind (Achtung: man hat h_j in Funktion von f_i ausgedrückt; um die üblichen Formeln wiederzufinden, muss man die Indizes i und j vertauschen).

Nun besitzt das Produkt AB den allgemeinen Term

$$(-1)^j \sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{k}{i} \binom{j}{k} = (-1)^j \sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{j}{i} \binom{j-i}{k-i} = (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \sum_{k=0}^{j-i} (-1)^k \binom{j-i}{k}.$$

Falls $i \neq j$, ist die letzte Summe gerade der binomische Ausdruck für $(1-1)^{j-i} = 0$. Falls $i = j$, enthält die Summe nur einen einzigen Term, der den Wert 1 hat.

Indem man die Rechnung zu Ende führt, erhält man tatsächlich

$$AB = \text{Id},$$

was den Beweis abschließt.

Aufgabe 7

[Satz von Hadamard]

Angenommen, es existiert ein Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker} A.$$

Wenn wir x als nichtnull voraussetzen, dann können wir ein i_0 so wählen, dass

$$|x_{i_0}| = \max\{|x_i|; i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Da $Ax = 0$ gilt, haben wir für alle i die Gleichung

$$\sum_k a_{i,k} x_k = 0,$$

und insbesondere

$$a_{i_0, i_0} x_{i_0} = - \sum_{k \neq i_0} a_{i_0, k} x_k.$$

Daraus folgt

$$|a_{i_0, i_0}| |x_{i_0}| = \left| - \sum_{k \neq i_0} a_{i_0, k} x_k \right| \leq \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0, k}| |x_k| \leq |x_{i_0}| \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0, k}|.$$

Schließlich, falls $|x_{i_0}| \neq 0$, können wir dividieren und erhalten

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0, k}|.$$

Damit stellt die Annahme, dass die vorstehende Bedingung für jedes i falsch ist, sicher, dass alle $|x_i|$ gleich 0 sind, also $x = \vec{0}$.

Dies bedeutet äquivalent: Wenn für alle i

$$|a_{i, i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i, j}|,$$

dann ist A invertierbar.

Aufgabe 8

[Diagonalisierung]

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$A_\lambda = A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Es wird dann eine Gauß-Elimination durchgeführt (ohne sich um die Inverse zu kümmern):

$$A_\lambda \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots$$

Nach weiteren Zeilenoperationen erhält man schließlich eine obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda + 1 & 0 & -1 + \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda + 1 & -1 + \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3 - \lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Die offensichtlichen Nullstellen von $3 - X^2 - 2X$ sind 1 und -3 , und $-X + 1$ verschwindet bei 1. Daraus folgt, dass A_λ nicht invertierbar ist für $\lambda \in \{1, -3\}$.

Für $\lambda = -3$ gilt:

$$A_{-3} = A + 3I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Kern von A_{-3} liegt. Die Matrix hat Rang 3, da sie äquivalent zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Diagonale $(1, 4, 4, 0)$ ist. Also gilt

$$AX = -3X \iff X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

—
Für $\lambda = 1$ gilt:

$$A_1 = A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Kern von A_1 liegen und linear unabhängig sind. Da A_1 mindestens eine nicht-null Spalte hat, gilt:

$$AX = X \iff X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

—
Setzt man

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so gilt $AP = PD$ mit

$$D = \text{diag}(-3, 1, 1, 1),$$

was zeigt, dass

$$A = PDP^{-1}.$$

Solche Rechnungen (und noch umfangreichere) werden in einem (zukünftigen?) Kapitel über Diagonalisierung behandelt.

Aufgabe 9

[Inverse Berechnung]

Die Reihenoperationen können wir durch Multiplikation von links mit den Elementarmatrizen. Wir schreiben E_{ij} für die $n \times n$ Matrix mit 0 überall bis auf die Position (i, j) , wo 1 steht. Dann sind die Elementarmatrizen definiert durch

$$\begin{aligned} P_{ij} &= I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}, \\ S_i(\lambda) &= I_n + (\lambda - 1)E_{ii}, \quad \lambda \neq 0, \\ T_{ij}(\lambda) &= I_n + \lambda E_{ij}. \end{aligned}$$

Wir können überprüfen: P_{ij} tauscht die i -te und j -te Reihen, $S_i(\lambda)$ multipliziert die i -te Reihe mit λ und $T_{ij}(\lambda)$ addiert λ mal die j -te zur i -te Reihe. Das bedeutet, alle sind invertierbar:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{-1} &= P_{ij} \\ S_i(\lambda)^{-1} &= S_i(\lambda^{-1}) \\ T_{ij}(\lambda)^{-1} &= T_{ij}(-\lambda). \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass A invertierbar ist. Dann existieren Elementarmatrizen $M_1, M_2, \dots, M_k$, sodass durch die respektiven Reihenoperation wir die Identitätsmatrix erhalten:

$$M_k \dots M_2 M_1 A = I_n.$$

Die Matrix B ist genau durch dieses Produkt gegeben, denn

$$B = M_k \dots M_2 M_1 I_n,$$

also ist B die Inverse von A .

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 13

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1 [Elementare Funktionen & Ableitung, 3+2 Punkte]

Wir wollen die Gleichung $a^b = b^a$ lösen, wobei a und b strikt positive ganze Zahlen sind. Offensichtlich ist $a = b$ eine Lösung; wir interessieren uns für die anderen Lösungen.

1. Untersuchen Sie die Funktion $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ (Wo ist sie definiert? Ist sie stetig, differenzierbar? Wie viele Extremstellen hat sie? Welche Grenzwerte besitzt sie?).
2. Folgern Sie, dass die Gleichung $a^b = b^a$ für $a \neq b$ genau zwei Lösungen in positiven ganzen Zahlen besitzt, und geben Sie diese an.

Aufgabe 2 [Reelle Zahlen & Integration, 2+2+1 Punkte]

Wir wollen zeigen, dass e irrational ist.

1. Zeigen Sie, dass für alle n gilt:

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$$

2. Folgern Sie:

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

3. Schließen Sie mittels eines Widerspruchsbeweises, dass e irrational ist.

Aufgabe 3 [Trigonometrie & Stetigkeit, 1+2+2 Punkte]

Wir wollen zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

1. Zeigen Sie, dass $\pi > 2\sqrt{2}$ gilt.
2. Zeigen Sie: Gilt für ein $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$, so existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{2} \cos \theta = \frac{\pi}{2}$. (*Hinweis:* $\cos z \pm \sin z = \sqrt{2} \cos(z \mp \frac{\pi}{4})$.)
3. Sei $f : x \mapsto \sin(\cos x) - \cos(\sin x)$. Folgern Sie aus den vorigen Fragen, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und schließen Sie mithilfe einer geeigneten Eigenschaft von f .

Aufgabe 4 [Folgen, 2+1+2 Punkte]

Fixieren Sie $x, y \in \mathbb{R}_+$ und betrachten Sie die beiden Folgen $(u_n)_n$ und $(v_n)_n$ mit $u_0 = x$, $v_0 = y$ und

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $(u_n)_n$ monoton fallend und $(v_n)_n$ monoton steigend ist.
2. Zeigen Sie, dass $v_n - u_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$ gilt, und folgern Sie, dass beide Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren.
3. Sei $M(x, y)$ dieser gemeinsame Grenzwert. Zeigen Sie $M(x, y) = M(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy})$ und folgern Sie: $M(x, y) = M(y, x)$ sowie $M(tx, ty) = t M(x, y)$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 5

[Summen & elementare Funktionen, 2+3 Punkte]

1. Zeigen Sie mithilfe der Untersuchung der Funktion $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}_+^*$, dass für alle $x > 0$ gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

2. Seien $a_1, \dots, a_n > 0$. Zeigen Sie unter Verwendung des vorherigen Resultats:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right) \geq n^2.$$

Aufgabe 6

[Matrizen, 2+2+1 Punkte]

Bestimmen Sie die $n \times n$ -Matrizen A , die mit allen $n \times n$ -Matrizen M kommutieren, d. h. $AM = MA$. Bezeichnen Sie mit a_{ij} den Eintrag von A in Zeile i , Spalte j .

- Für $1 \leq p, q \leq n$ sei $E_{p,q}$ die Matrix, die überall 0 enthält, außer in Zeile p , Spalte q , wo der Eintrag 1 ist. Berechnen Sie $AE_{p,q}$ und $E_{p,q}A$.
- Folgern Sie, dass für $p \neq q$ gilt $a_{pq} = 0$ und dass $a_{pp} = a_{qq}$. Schließen Sie, dass $A = \lambda I_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Zeigen Sie umgekehrt, dass Matrizen der Form λI_n mit allen $n \times n$ -Matrizen kommutieren.

Aufgabe 7

[Stetigkeit & Integration, 5 Punkte]

Seien f und g stetige Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in [a, b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \cdot \int_a^b g(t) dt.$$

Aufgabe 8

[Vektorräume, 5 Punkte]

Sei V ein Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Wir definieren eine Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ wie folgt:

- Ist $v_i = 0$, so sei $\pi(i) = i$.
- Gibt es ein $j \in \{i+1, \dots, n\}$ mit $v_i \in \text{span}(v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j)$, so sei $\pi(i)$ das kleinste solche j .
- Andernfalls sei $\pi(i)$ das kleinste $j \leq i$ mit $v_i \in \text{span}(v_{i+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_j)$.

Zeigen Sie, dass π bijektiv ist (es genügt, die Injektivität zu zeigen).

Abgabe: 28.01.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 13

Aufgabe 1

[Elementare Funktionen & Ableitung]

1. Die Funktion ist als Quotient von Funktionen auf $]0, +\infty[$ definiert, stetig und differenzierbar. Für $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Daher ist f vor e wachsend und nach e fallend. Sie erreicht ihr globales Maximum bei $x = e$ mit dem Wert $f(e) = e^{-1}$. Außerdem gelten die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

Daraus ergeben sich das entsprechende Variationstableau und der zugehörige Graph.

2. Angenommen, es gilt $a^b = b^a$ mit natürlichen (von null verschiedenen) Zahlen a, b und $a < b$ (der Fall $a = b$ liefert offensichtlich eine Lösung). Dann ist

$$\ln(a^b) = \ln(b^a),$$

und daraus folgt $f(a) = f(b)$. Wendet man den Satz über die Bijektivität von f auf den Intervallen

$$I :=]0, e] \quad \text{und} \quad J := [e, +\infty[$$

an, so folgt, dass a und b nicht beide in I oder beide in J liegen können. Insbesondere gilt $a \leq e$. Somit ist $a \in \{1, 2\}$, und es gibt höchstens ein $b \neq a$ mit $f(b) = f(a)$.

Schließlich behandelt man die beiden Fälle direkt:

- (a) $a = 1$: Dann ist $f(a) = 0$, und es ist unmöglich, ein b zu finden (sonst wäre $\ln b = 0$, also $b = 1 > e$, ein Widerspruch).

- (b) $a = 2$: Dann ist $b = 4$ eine Lösung.

Damit sind die Lösungspaare der Gleichung $a^b = b^a$ mit natürlichen Zahlen a, b gegeben durch

$$\{(a, a); a \in \mathbb{N}\} \cup \{(2, 4), (4, 2)\}.$$

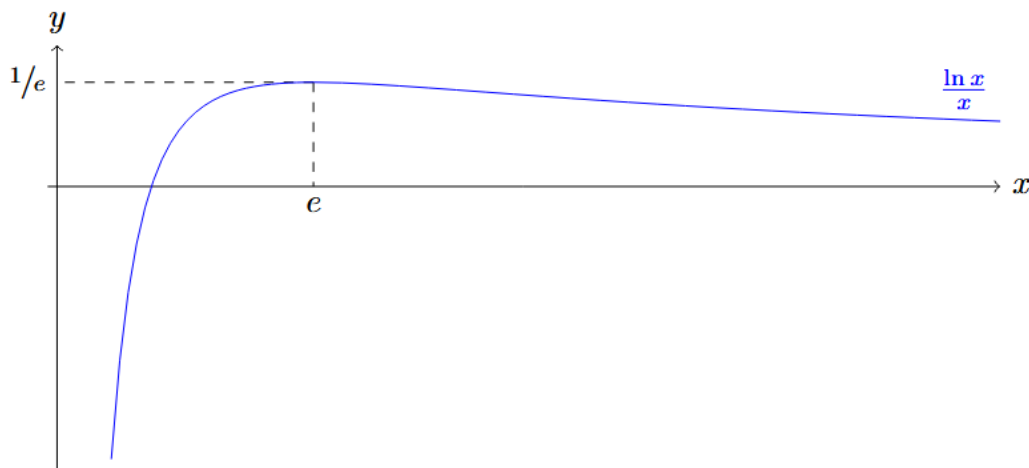


Abbildung 4: $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

Aufgabe 2

[Reelle Zahlen & Integration]

1. Wir argumentieren mittels Induktion. Für $n = 0$ ist die Gleichung

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$

offensichtlich, da

$$e = \int_0^1 e^t dt.$$

Angenommen, die Gleichung gilt für ein gegebenes n . Dann führen wir eine partielle Integration durch:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt &= \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \right]_0^1 - (-1) \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right). \end{aligned}$$

Durch Induktion erhält man somit die gewünschte Gleichung.

2. Daraus folgt:

$$0 < \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

3. Angenommen, $e = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt für alle n :

$$0 < a n! - b \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

Insbesondere für $n = 3b$ erhält man:

$$0 < a n! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < 1.$$

Damit ist ein ganzzahliger Ausdruck strikt zwischen 0 und 1 eingeschlossen, was unmöglich ist. Also folgt: $e \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3

[Trigonometrie & Stetigkeit]

- Wir haben $1,5^2 = 2,25 > 2$. Da die Abbildung $x \mapsto \sqrt{x}$ monoton wachsend ist, folgern wir $\sqrt{2} < 1,5$. Somit gilt $2\sqrt{2} < 3 < \pi$.
- Angenommen, es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$. Dann ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \cos(\sin x),$$

also $\frac{\pi}{2} - \cos x = \pm \sin x$. Anders ausgedrückt:

$$\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2}.$$

Mit dem Hinweis folgt, dass es mit $\theta = x - \frac{\pi}{4}$ oder $\theta = x + \frac{\pi}{4}$ gilt:

$$\sqrt{2} \cos \theta = \frac{\pi}{2}.$$

- Gilt für ein $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x) = 0$, so ist $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$, und es existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{2} \cos \theta = \frac{\pi}{2}$. Da jedoch $|\cos \theta| \leq 1$ gilt, folgt $\sqrt{2} > \frac{\pi}{2}$, was nach der ersten Frage unmöglich ist.

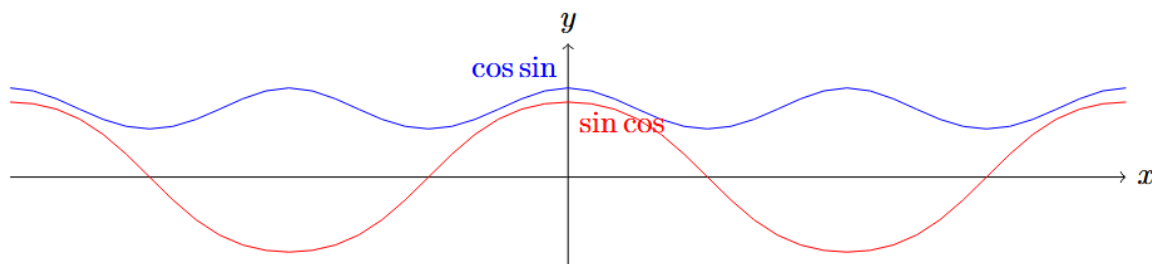


Abbildung 5: $x \mapsto \sin(\cos(x))$ und $x \mapsto \cos(\sin(x))$

Also ist f eine stetige Funktion, die niemals den Wert 0 annimmt. Nach dem Zwischenwertsatz ist f entweder überall positiv oder überall negativ. Es bleibt, den Wert von f an einer Stelle zu bestimmen. Zum Beispiel:

$$f(0) = \sin(\cos 0) - \cos(\sin 0) = \sin 1 - \cos 0 = \sin 1 - 1 < 0$$

(da $|\sin \alpha| \leq 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt und wir wissen, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$).
Damit ist f überall negativ, und es folgt

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4

[Folgen]

- 1.
2. Zunächst gilt $v_n \leq u_n$, da

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2}{2}.$$

Dies impliziert, dass die Folge $(u_n)_n$ monoton fallend ist (denn

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

) und dass die Folge $(v_n)_n$ monoton steigend ist (denn

$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n).$$

Außerdem gilt

$$0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{u_n - v_n}{2},$$

also

$$0 \leq u_n - v_n \leq 2^{-n}(u_0 - v_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Daraus folgt der Adjunktencharakter dieser beiden Folgen.

3. Nach Definition gilt

$$M(x, y) = M\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = M\left(\frac{y+x}{2}, \sqrt{yx}\right) = M(y, x),$$

also ist M symmetrisch.

Setzt man nun $u'_0 = tx$ und $v'_0 = ty$, so kann man durch Induktion zeigen, dass $u'_n = t u_n$ und $v'_n = t v_n$ gilt. Damit ist der gemeinsame Grenzwert der Folgen $(u'_n)_n$ und $(v'_n)_n$ gleich dem t -fachen des gemeinsamen Grenzwerts von $(u_n)_n$ und $(v_n)_n$, also

$$M(tx, ty) = t M(x, y).$$

Schließlich wurde die Ungleichung bereits mithilfe des Adjunktencharakters der beiden Folgen gezeigt; es bleibt der Gleichheitsfall. Tritt Gleichheit ein, so ist insbesondere eine der beiden Folgen $(u_n)_n$ oder $(v_n)_n$ stationär. Daraus folgt, dass $x = y$ gelten muss, da dann

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy},$$

was äquivalent zu

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} = 0$$

ist.

Aufgabe 5

[Summen & elementare Funktionen]

1. Es gilt $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, also ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x^2 = 1$, d. h. $x = 1$ (da $x > 0$). Somit besitzt f genau ein Extremum, das bei $x = 1$ angenommen wird und den Wert $f(1) = 2$ hat. Es handelt sich um ein Minimum, da zum Beispiel $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Wir haben:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} + \sum_{i < j} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) \geq \sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i < j} 2 = n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

Aufgabe 6

[Matrizen]

Wir benutzen die Basis der Matrizen $(E_{ij})_{i,j}$, wobei E_{ij} die Matrix ist, die in Zeile i , Spalte j den Wert 1 und sonst überall 0 hat. Sei M eine Matrix, die mit allen anderen Matrizen kommutiert. Insbesondere kommutiert sie mit E_{ab} (für fest gewählte a und b), also gilt

$$E_{ab}M = ME_{ab}.$$

Schreibt man $M = [m_{ij}]_{i,j}$ und $E_{ab} = [\delta_{ia}\delta_{jb}]_{i,j}$ mit dem Kronecker-Symbol, so erhält man:

$$E_{ab}M = \left[\sum_k \delta_{ia}\delta_{kb}m_{kj} \right]_{i,j} = [m_{bj}\delta_{ia}]_{i,j},$$

$$ME_{ab} = \left[\sum_k m_{ik}\delta_{ka}\delta_{jb} \right]_{i,j} = [m_{ia}\delta_{jb}]_{i,j}.$$

Damit gilt für alle i, j :

$$m_{bj}\delta_{ia} = m_{ia}\delta_{jb}.$$

Wählt man $i = a$ und $j = b$, so folgt daraus $m_{bb} = m_{aa}$; außerdem erhält man $m_{bj} = 0$ für alle $j \neq b$. Diese beiden Eigenschaften gelten für alle a und b .

Insbesondere ist für jedes b gleich $m_{bb} = m_{11}$, d. h. alle Diagonaleinträge sind gleich, und es gilt $m_{bj} = 0$ für alle Paare $b \neq j$, d. h. alle Nichtdiagonaleinträge verschwinden.

Somit ist M eine Diagonalmatrix mit lauter gleichen Diagonaleinträgen, also eine skalare Matrix der Form

$$M = \lambda I_n.$$

Umgekehrt ist klar, dass skalare Matrizen mit allen Matrizen kommutieren. Damit haben wir das multiplikative Zentrum des Rings $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ bestimmt.

Aufgabe 7

[Stetigkeit & Integration]

Da f auf $[a, b]$ stetig ist, ist sie beschränkt und nimmt ihre Extremwerte an; bezeichnen wir

$$m_f = \min f \quad \text{und} \quad M_f = \max f.$$

Dann gilt:

$$m_f g \leq f g \leq M_f g.$$

Durch Integration erhält man:

$$m_f \int_a^b g \leq \int_a^b f g \leq M_f \int_a^b g.$$

Daraus folgt, dass es ein $k \in [m_f, M_f]$ gibt mit

$$\int_a^b f g = k \int_a^b g.$$

Da f auf $[a, b]$ stetig ist, existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = k$, weil

$$k \in [m_f, M_f] = f([a, b]).$$

Damit ist gezeigt, dass es ein $c \in [a, b]$ gibt, so dass

$$\int_a^b f g = f(c) \int_a^b g.$$

Aufgabe 8

[Vektorräume]

Es genügt zu zeigen, dass π injektiv ist. Alle folgenden Indizes sind modulo n zu verstehen.

Angenommen, es gilt $\pi(i) = j \neq i$. Dann existieren Koeffizienten $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_j$ mit

$$v_i = \sum_{k=i+1}^j \lambda_k v_k.$$

Außerdem ist $\lambda_j \neq 0$, denn andernfalls hätte man $v_i \in \text{span}(v_{i+1}, \dots, v_{j-1})$, also $\pi(i) < j$, was ein Widerspruch wäre. Daher gilt:

$$v_j = \frac{1}{\lambda_j} \left(v_i - \sum_{k=i+1}^{j-1} \lambda_k v_k \right).$$

Angenommen nun, es gilt $\pi(i') = j$ mit $i' < i$ (durch Vertauschen der Rollen von i und i' wird damit der allgemeine Fall erfasst). Dann existieren Koeffizienten $(\mu_k)_k$ mit

$$v_{i'} = \sum_{k=i'+1}^j \mu_k v_k.$$

Ersetzt man v_j durch seinen Ausdruck in Abhängigkeit von $(v_i, \dots, v_{j-1})$, so erhält man einen Ausdruck von $v_{i'}$ als Linearkombination von $(v_{i'+1}, \dots, v_{j-1})$, also $\pi(i') < j$, was ein Widerspruch ist:

$$v_{i'} = \sum_{k=i'+1}^{j-1} \mu_k v_k + \frac{1}{\lambda_j} \left(v_i - \sum_{k=i+1}^{j-1} \lambda_k v_k \right).$$

Damit folgt: Gilt $\pi(i) = \pi(i') \neq i$, so ist $i = i'$.

Es bleibt der Fall $\pi(i) = i = \pi(i')$ zu betrachten. Ist $v_i = \vec{0}$, so gilt

$$\text{span}(v_{i'+1}, \dots, v_i) = \text{span}(v_{i'+1}, \dots, v_{i-1}),$$

also $\pi(i') < i$, ein Widerspruch. Ist hingegen $v_i \neq 0$ und $v_i \notin \text{span}(v_j)_{j \neq i}$, so liefert $\pi(i') = i$ wie zuvor:

$$v_i = \frac{1}{\lambda'_i} \left(v_{i'} - \sum_{k=i'+1}^{i-1} \lambda'_k v_k \right),$$

also insbesondere $v_i \in \text{span}(v_{i'}, \dots, v_{i-1})$, was ebenfalls unmöglich ist.

Damit ist gezeigt, dass π injektiv ist und folglich bijektiv (da $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$). Also ist π eine Permutation.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 14

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Van der Monde Determinant, 10 Punkte]

Sei $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, und A die $n \times n$ Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie anhand der Determinantenformel, dass für alle $n \geq 2$ gilt: $\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Aufgabe 2

[Heisenberg-Gruppe, 1+2+2+2+2+1 Punkte]

Eine "Heisenberg-Matrix" ist eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Wir notieren

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ als } (a, b, c).$$

und $\mathbb{H}_3 = \{(a, b, c) ; a, b, c \in \mathbb{Z}\}$.

1. Berechnen: $\det(a, b, c)$.
2. Zeigen Sie, dass $(a, b, c) \cdot (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f + ae)$.
3. Bestimmen Sie $(a, b, c)^{-1}$ und $(a, b, c)^n$.
4. Für zwei Matrizen X, Y definieren wir $[X, Y] = X \cdot Y \cdot X^{-1} \cdot Y^{-1}$. Berechnen Sie $[(a, b, c), (d, e, f)]$.
5. Folgern Sie die Menge der Heisenberg-Matrizen $X = (a, b, c)$, sodass für jede Heisenberg-Matrix $Y = (d, e, f)$ gilt: $X \cdot Y = Y \cdot X$.
6. Zeigen Sie, dass jede Matrix als Produkt von $(1, 0, 0)^m$ und $(0, 1, 0)^n$ geschrieben werden kann, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

[Hankel-Determinanten, 2+2+2+2+2 Punkte]

Sei $(b_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Man konstruiert ihre Hankel-Transformierte $(h_n)_{n \geq 0}$ durch $h_n = \det H_n$ mit

$$H_n = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n+1} \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass eine Folge genau dann die Nullfolge ist, wenn ihre Hankel-Transformierte die Nullfolge ist.
2. Zeigen Sie, dass eine Folge genau dann eine Rekursionsbeziehung (erfüllt), wenn ihre Hankel-Transformierte ab einem gewissen Rang verschwindet.
3. Wir fixieren eine Folge $(b_n)_n$ und definieren eine Folge $(c_n)_n$ durch $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$. Wir wollen zeigen, dass die Hankel-Transformationen von $(b_n)_n$ und von $(c_n)_n$ übereinstimmen. Bestimmen Sie zunächst die Determinante der $n \times n$ -Matrix A_n , deren Eintrag an der Stelle (i, j) gleich $\binom{j-1}{i-1}$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ und gleich 0 sonst ist.
4. Wir bezeichnen mit $H_n^{(b)}$ bzw. $H_n^{(c)}$ die zu $(b_n)_n$ bzw. $(c_n)_n$ gehörenden Hankel-Matrizen. Zeigen Sie, dass $H_n^{(c)} = A_n \cdot H_n^{(b)} \cdot A_n^T$. *Hinweis:* $\sum_{\ell=0}^k \binom{i}{\ell} \binom{j}{k-\ell} = \binom{i+j}{k}$, können Sie es ohne Nachweis verwenden.
5. Folgern Sie daraus, dass die Folgen $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ dieselbe Hankel-Transformation besitzen.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch? Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Wenn es falsch ist, geben Sie ein einfaches und klares Gegenbeispiel an:
 - Die Determinante der Summe zweier quadratischer Matrizen ist die Summe der Determinanten dieser Matrizen.
 - Die Determinante des Produkts zweier quadratischer Matrizen ist das Produkt der Determinanten dieser Matrizen.
 - Die Determinante des Produkts zweier rechteckiger Matrizen ist das Produkt der Determinanten dieser Matrizen.
 - Die Determinante einer Matrix mit strikt positiven Einträgen ist strikt positiv.
 - Die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.
 - Das Produkt zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar.
 - Die Summe zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar.
 - Die Determinante der Transponierten einer quadratischen Matrix ist das Gegenteil der Determinante der ursprünglichen Matrix.
 - Ist eine Matrix invertierbar, so ist die Determinante ihrer Inversen das Inverse ihrer Determinante.

Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen. Sind die Matrizen jeweils invertierbar (**1 Punkte**)? Welche Aussage können Sie über den Rang jeweils machen (**1 Punkte**)?

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme anhand der Cramerschen Regel.

$$\begin{array}{lcl}
 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\
 \bullet & 3x_1 & & + & 4x_3 & = & -15 \\
 6x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\
 & 3x_1 & & - & 5x_3 & = & 1 \\
 \bullet & 7x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -3 \\
 & 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5
 \end{array}$$

Abgabe: ???.???.???? vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):
“

Gesucht ist eine 3×3 -Matrix A , deren Determinante strikt positiv ist, während *alle echten (proper) Unterdeterminanten* von A strikt negativ sind. Dabei bezeichnet man als echte Unterdeterminanten alle Unterdeterminanten der Ordnung 1 und 2, nicht jedoch die Determinante selbst.

Beispiel. Betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Begründung. Alle 1×1 -Unterdeterminanten sind die Einträge der Matrix und somit strikt negativ. Eine direkte Rechnung zeigt außerdem, dass alle 2×2 -Unterdeterminanten negativ sind. Dagegen ist die Determinante der gesamten Matrix gegeben durch

$$\det(A) = 1 > 0.$$

Damit erfüllt die Matrix A genau die geforderten Eigenschaften: Alle echten Unterdeterminanten sind strikt negativ, während die Determinante strikt positiv ist. Dieses Beispiel zeigt, dass das Vorzeichen der Determinante nicht allein durch die Vorzeichen der echten Unterdeterminanten festgelegt ist.

”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 6

[Determinantenmultiplikationsformel]

Ziel dieser Aufgabe ist, die Determinantenmultiplikationsformel in Detail zu beweisen: Sei K ein Körper und seien $A, B \in \text{Mat}(n \times n; K)$ Matrizen. Dann gilt

$$\det AB = (\det A)(\det B).$$

1. Sei $\det AB = 0$. Welchen Schluss können Sie über $\det A$ und $\det B$ ziehen?

Hinweis: Was bedeutet $\det AB \neq 0$ bezüglich Invertierbarkeit der Matrizen?

2. Nehme nun an, dass $\det B \neq 0$ und definiere

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Mat}(n \times n; K) &\rightarrow K \\ A &\mapsto (\det B)^{-1}(\det AB). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass φ normiert ist, d.h. $\varphi(I_n) = 1$.

3. Zeigen Sie, dass φ linear ist. D.h. falls A aus den Zeilenvektoren $v_1, \dots, v_n$ besteht mit $v_i = v'_i + \alpha v''_i$, A' aus den Zeilenvektoren $v_1, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_n$ und A'' aus den Zeilenvektoren $v_1, \dots, v_{i-1}, v''_i, v_{i+1}, \dots, v_n$, dann ist $\varphi(A) = \varphi(A') + \alpha \varphi(A'')$ für alle $\alpha \in K$.
4. Zeigen Sie, dass φ alternierend ist, d.h. falls A zwei gleiche Zeilen hat, ist $\varphi(A) = 0$.
5. Ziehen Sie den Schluss, dass

$$\det AB = (\det A)(\det B).$$

Aufgabe 7

[Plücker-Koordinaten und Plücker-Relation]

Für M ein $2 \times k$ Matrix, definieren wir die Plücker-Koordinate $p_{i,j}$ durch $p_{i,j} = \det \begin{pmatrix} m_{1i} & m_{1j} \\ m_{2i} & m_{2j} \end{pmatrix}$ (und $p_{i,i} = m_{1i}$).

1. Zeigen Sie für $i < j < k < l$, dass gilt: $p_{i,k}p_{j,l} + p_{i,l}p_{j,k} = -p_{i,j}p_{k,l}$.

2. Zeigen Sie, dass diese Koordinaten eine Injektion der Ebenen von $\mathbb{R}^k$ in die Geraden von $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ definieren.
3. Leiten Sie aus Frage 1. ab, dass es sich nicht um eine Bijektion handelt.

Aufgabe 8

[Determinant durch 13 teilbar ist]

Zeigen Sie, ohne ihn auszurechnen, dass der folgende Determinant durch 13 teilbar ist.

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Hinweis: 169, 273 und 546 durch 13 teilbar sind.

Aufgabe 9

[Ein schöner Determinant]

Berechnen Sie die folgende Determinante für $s_1, \dots, s_n$ einige feste reelle Zahlen.

$$\det \begin{pmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

[Begleitmatrix]

Berechnen Sie die Determinante $\det(A - xI_n)$ für $a_0, \dots, a_n$ einige feste reelle Zahlen, und mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 14

Aufgabe 1

[Van der Monde Determinant]

Die Matrix A ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen wir die Aussage mit Induktion.

Induktionsanfang: $n = 2$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i).$$

Induktionsschritt: Nehme nun an, dass die Aussage für $A \in \text{Mat}((n-1) \times (n-1); K)$ von dieser Form gilt. Da die Determinante nicht geändert wird, wenn ein Vielfaches von einer Spalte zu einer anderen addiert wird (Satz 13.2, Satz 13.9), können wir die j -te Spalte mit $-x_1$ multiplizieren und dies zur $j+1$ -ten Spalte addieren, ohne die Determinante zu ändern:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen diese Determinante durch Reihenentwicklung entlang der ersten Reihe:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Von jeder Zeile können wir nun $x_j - x_1$ für $j = 2, \dots, n$ ausfaktorisieren und erhalten

$$\det A = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Nun können wir die Induktionsannahme anwenden, denn diese Matrix ist in der angegebenen Form und der Größe $(n-1) \times (n-1)$:

$$\det A = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Aufgabe 2

[Heisenberg-Gruppe]

1. (a, b, c) triangular ist, so $\det(a, b, c) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.
2. Wir haben:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a+a', b+b', c+c'+ab').$$

3. Weiter gilt:

$$(a, b, c)(-a, -b, -c + ab) = (0, 0, 0) = I_3,$$

, so $(a, b, c)^{-1} = (-a, -b, -c + ab)$ und durch unmittelbare Induktion:

$$(a, b, c)^n = (na, nb, nc + \frac{n(n-1)}{2}ab).$$

4. Setzt man nun $X = (a, b, c)$ und $Y = (a', b', c')$, so findet man:

$$[X, Y] = (a, b, c)(a', b', c')(-a, -b, -c+ab)(-a', -b', -c'+a'b') = (a+a', b+b', c+c'+ab')(-a-a', -b-b', -c-c'+ab).$$

5. Beweis $X \cdot Y = Y \cdot X$, dann gilt $[X, Y] = I_3 = (0, 0, 0)$.

Sei $X = (a, b, c)$ mit $[X, Y] = (0, 0, 0)$ für alle $Y = (a', b', c')$. Insbesondere, erhält man:

$$0 = [x, (0, 1, 0)] = a, \quad \text{und} \quad 0 = [x, (-1, 0, 0)] = b.$$

Also gilt $X = (0, 0, c)$. Umgekehrt, wenn $X = (0, 0, c)$, dann gilt für alle $Y = (a', b', c')$ tatsächlich $[X, Y] = (0, 0, 0)$. Schließlich:

$$\{X \in \mathbb{H}_3 ; \forall Y \in \mathbb{H}_3, X \cdot Y = Y \cdot X\} = \{(0, 0, c) ; c \in \mathbb{Z}\}$$

6. Dann gilt für $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$(1, 0, 0)^a (0, 1, 0)^b = (a, 0, 0)(0, b, 0) = (a, b, ab).$$

Daher (zur Erinnerung: $\mathbb{H}_3$ ist nicht kommutativ):

$$(a, b, c) = (1, 0, 0)^a (0, 1, 0)^b (0, 0, 1)^{-ab} = (1, 0, 0)^a (0, 1, 0)^b [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]^{-ab} = (1, 0, 0)^a (0, 1, 0)^b ((0, 1, 0)(1, 0, 0)(0, 1, 0)^{-1}(1, 0, 0)^{-1})^{ab}$$

Aufgabe 3

[Hankel-Determinanten]

1. Wenn die Folge $(b_n)_n$ ab einem bestimmten Index p null ist, dann enthält die Determinante h_n für $n \geq p$ eine Nullspalte:

$$\begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_{n+p} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Umgekehrt, wenn h_n vollständig null ist, dann gilt zunächst $b_0 = h_0 = 0$, und durch Induktion: Angenommen $b_k = 0$ für alle $k \leq n-1$. Betrachten wir dann h_n (nur die Permutationen, deren Produkt nicht null ist):

$$0 = h_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 0 & 0 & \dots & b_n & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_n & \dots & b_{2n-2} & b_{2n-1} \\ b_n & b_{n+1} & \dots & b_{2n-1} & b_{2n} \end{vmatrix} = b_n^n.$$

Also folgt durch Induktion, dass $b_n = 0$ für alle n gilt.

2. Wenn die Folge $(b_n)_n$ eine Rekursionsbeziehung erfüllt, sagen wir

$$b_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k b_{n+k} \quad \text{für alle } n,$$

dann kann ab $n = p$ die p -te Spalte der Determinante von h_n als Linearkombination der vorhergehenden Spalten geschrieben werden. Daher ist die Determinante null:

$$\begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_{n+p} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \begin{pmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_{k+n} \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt, wenn $(h_n)_n$ ab einem bestimmten Index p null ist, bedeutet dies insbesondere, dass die Spalten von h_p linear abhängig sind. Da die Spalten von h_{p-1} es nicht sind, kann man Koeffizienten $(\alpha_k)_k$ finden, sodass

$$b_{p+n} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k b_{n+k} \quad \text{für } n \leq p.$$

Wir zeigen, dass diese Gleichung für alle n gilt. Angenommen, sie gilt für alle $n \leq N + p - 1$. Betrachten wir dann h_N . Die letzte Spalte C_N ist eine Linearkombination der vorhergehenden, sagen wir

$$C_N = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k C_k.$$

Insbesondere ergibt sich:

$$b_{N+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k b_{k+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{k+j} = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\alpha_j \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k b_{k+j} \right) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{N+j}.$$

Damit gilt die Rekursionsbeziehung für alle Indizes.

3. A_n is triangular, mit 1 über die Diagonale, so $\det A_n = 1$.
4. Wir haben:

$$\begin{aligned} A_n H_n^{(b)} A_n^T &= \left[\sum_{k,l=1}^{n+1} \binom{i-1}{k-1} b_{k+l-2} \binom{j-1}{l-1} \right]_{1 \leq i,j \leq n+1} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{2n} b_k \sum_{l=1}^{n+1} \binom{j-1}{l-1} \binom{i-1}{k-l+1} \right]_{1 \leq i,j \leq n+1} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{2n} b_k \binom{i+j-2}{k} \right]_{1 \leq i,j \leq n+1} \\ &= [c_{i+j-2}]_{1 \leq i,j \leq n+1} \\ &= H_n^{(c)}. \end{aligned}$$

5. Schließlich, wenn man die Determinante auf beiden Seiten nimmt, unter Verwendung der Multiplikativität der Determinante und der Tatsache, dass $\det A_n = \det A_n^T = 1$, folgt, dass die Hankel-Transformation unter der Euler-Transformation invariant ist.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1.
 - Falsch
 - Wahr
 - Falsch
 - Falsch
 - Wahr
 - Wahr
 - Falsch
 - Falsch
 - Wahr
2.
 - Wir benutzen die Formel für die Determinante einer 2×2 Matrix (siehe Aufgabe 1):

$$\begin{aligned} \det A &= 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \\ &= 4 - (-6) \\ &= 10. \end{aligned}$$

Da die Determinante ungleich Null ist, ist A invertierbar und hat vollen Rang (2).

- Wir berechnen die Determinante anhand der Regel von Sarrus (Aufgabe 1 b)):

$$\begin{aligned} \det B &= (1 \cdot (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 4) - (1 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot 4) \\ &= (4 + 4 + 4) - (-2 - 2 + 16) \\ &= 12 - (12) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Determinante ist Null, also ist B nicht invertierbar und hat nicht vollen Rang (d.h. Rang $B < 3$). In diesem Fall ist Rang $B = 2$, weil Rang 1 bedeuten würde, dass alle Zeilen Vielfache voneinander wären, was nicht der Fall ist.

- Wir berechnen die Determinante anhand von Spaltenentwicklung in der zweiten Spalte:

$$\det C = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ((-2) \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 1)$$

$$- ((-1) \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 1)$$

$$= (-4 - 9 - 2) - (-6 - 2 - 6)$$

$$= -15 - (-14)$$

$$= -1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \cdot (-1) \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot 2)$$

$$- (4 \cdot (-1) \cdot 2 + 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2)$$

$$= (-3 - 10 - 16) - (-8 - 30 - 2)$$

$$= -29 - (-40)$$

$$= 11$$

$$\det C = -1 + 11 = 10.$$

Die Determinante ist ungleich Null, also ist C invertierbar und hat vollen Rang (4).

- Die Matrix $A \in \text{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinanten:

$$\begin{aligned}
 \det A &= (2 \cdot 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 1) \\
 &\quad - (2 \cdot 0 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 1) \\
 &= (0 + 120 + 6) - (0 - 45 + 8) = 126 - (-37) = 163 \\
 \det \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -15 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} &= ((-3) \cdot 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-15) \cdot 1) \\
 &\quad - (2 \cdot 0 \cdot 4 + 5 \cdot (-15) \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 \cdot 1) \\
 &= (0 + 80 - 30) - (0 + 225 - 12) = 50 - 213 = -163 \\
 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -15 & 4 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} &= (2 \cdot (-15) \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 4) \\
 &\quad - (2 \cdot (-15) \cdot 6 + (-3) \cdot 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 4) \\
 &= (90 - 72 + 24) - (-180 + 27 + 32) = 42 - (-121) = 163 \\
 \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 0 & -15 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= (2 \cdot 0 \cdot 4 + 5 \cdot (-15) \cdot 6 + (-3) \cdot 3 \cdot 1) \\
 &\quad - ((-3) \cdot 0 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-15) \cdot 1) \\
 &= (0 - 450 - 9) - (0 + 60 - 30) = -459 - 30 = -489
 \end{aligned}$$

Die Lösung ist gegeben durch $(\frac{-163}{163}, \frac{163}{163}, \frac{-489}{163}) = (-1, 1, -3)$.

- Die Matrix $A \in \text{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 7 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinanten:

$$\begin{aligned}
 \det A &= (3 \cdot (-4) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + (-5) \cdot 7 \cdot (-1)) \\
 &\quad - ((-5) \cdot (-4) \cdot 4 + 0 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)) \\
 &= (-12 + 0 + 35) - (80 + 0 + 3) = 23 - 83 = -60 \\
 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= (1 \cdot (-4) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) \cdot (-1)) \\
 &\quad - ((-5) \cdot (-4) \cdot 5 + 0 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1)) \\
 &= (-4 + 0 - 15) - (100 + 0 + 1) = -19 - 101 = -120 \\
 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} &= (3 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + (-5) \cdot 7 \cdot 5) \\
 &\quad - ((-5) \cdot (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 5) \\
 &= (-9 - 4 - 175) - (60 + 7 - 15) = -188 - 52 = -240 \\
 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -4 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} &= (3 \cdot (-4) \cdot 5 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 7 \cdot (-1)) \\
 &\quad - (1 \cdot (-4) \cdot 4 + 0 \cdot 7 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) \cdot (-1)) \\
 &= (-60 + 0 - 7) - (-16 + 0 + 9) = -67 - (-7) = -60
 \end{aligned}$$

Die Lösung ist gegeben durch $(\frac{-120}{-60}, \frac{-240}{-60}, \frac{-60}{-60}) = (2, 4, 1)$.

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Es gibt $\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$ (nicht > 0), und $\det A = -1$ (nicht 1)...

Aufgabe 6

[Determinantenmultiplikationsformel]

1. Aus Satz 13.4 wissen wir, dass $\det AB \neq 0 \Leftrightarrow AB$ ist invertierbar. Das Gleiche gilt natürlich für A und B . Nehme an, dass $\det A$ und $\det B$ ungleich Null sind. Dann sind A und B beide invertierbar, d.h. es existieren A^{-1} und $B^{-1} \in \text{Mat}(n \times n; K)$. Da $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = I_n$ ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \in \text{Mat}(n \times n; K)$, also ist auch AB invertierbar. Es folgt, dass $\det AB \neq 0$, was aber ein Widerspruch ist. Das heißt, falls $\det AB = 0$ ist entweder $\det A = 0$ oder $\det B = 0$ (oder beides) und es gilt

$$\det(AB) = 0 = (\det A)(\det B).$$

2. Wir berechnen $\varphi(I_n)$, indem wir I_n für A einsetzen:

$$\begin{aligned} \varphi(I_n) &= (\det B)^{-1}(\det I_n B) \\ &= (\det B)^{-1}(\det B) = 1, \end{aligned}$$

also ist φ normiert.

3. Um die Notation einfach zu halten, definieren wir für zwei Vektoren der gleichen Dimension $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ das Skalarprodukt $x * y := \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Wir schreiben $w_1, \dots, w_n$ für die Spaltenvektoren von B und multiplizieren die entsprechenden Matrizen $(AB, A'B, A''B)$ miteinander:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v'_i + \alpha v''_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 * w_1 & \dots & v_1 * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ (v'_i + \alpha v''_i) * w_1 & \dots & (v'_i + \alpha v''_i) * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n * w_1 & \dots & v_n * w_n \end{pmatrix} \\ A'B &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v'_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 * w_1 & \dots & v_1 * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v'_i * w_1 & \dots & v'_i * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n * w_1 & \dots & v_n * w_n \end{pmatrix} \\ A''B &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v''_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 * w_1 & \dots & v_1 * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v''_i * w_1 & \dots & v''_i * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n * w_1 & \dots & v_n * w_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die v_i Zeilenvektoren und die w_j Spaltenvektoren sind, ist $*$ Matrizenmultiplikation, was mit Vektoren linear ist, d.h.

$$(v'_i + \alpha v''_i) * w_j = v'_i * w_j + \alpha v''_i * w_j.$$

Wir berechnen nun die Determinanten durch Reihenentwicklung entlang der i -ten Reihe.

$$\begin{aligned}
\det AB &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} (v'_i * w_j + \alpha v''_i * w_j) \det(AB)_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} + \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \alpha v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} + \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
\det A'B &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(A'B)_{ij} \\
\det A''B &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(A''B)_{ij}.
\end{aligned}$$

Weil AB , $A'B$ und $A''B$ sich nur in der i -ten Reihe unterscheiden und genau diese Reihe in $(AB)_{ij}$, $(A'B)_{ij}$ und $(A''B)_{ij}$ wegfällt, sind sie gleich: $(AB)_{ij} = (A'B)_{ij} = (A''B)_{ij}$ für $j = 1, \dots, n$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi(A') &= (\det B)^{-1} (\det A'B) \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(A'B)_{ij} \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
\varphi(A'') &= (\det B)^{-1} (\det A''B) \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(A''B)_{ij} \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
\varphi(A) &= (\det B)^{-1} (\det AB) \\
&= (\det B)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} + \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \right) \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} + \alpha (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
&= \varphi(A') + \alpha \varphi(A''),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

4. Nehme an, dass die i -te und j -te Zeilen von A gleich sind für ein $i \neq j$. Dann können wir die Zeilenvektoren von A als $v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n$ und die Spaltenvektor von B als $w_1, \dots, w_n$

schreiben. Wir berechnen das Produkte AB :

$$AB = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 * w_1 & \dots & v_1 * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_i * w_1 & \dots & v_i * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_i * w_1 & \dots & v_i * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n * w_1 & \dots & v_n * w_n \end{pmatrix},$$

also sind zwei Zeilen vom Produkt AB gleich. Da die Determinante alternierend ist, ist $\det AB = 0$, also gilt

$$\varphi(A) = (\det B)^{-1}(\det AB) = (\det B)^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Es folgt, dass φ auch alternierend ist.

5. Aus Satz 13.5 (und Definition 13.1) folgt, dass φ die Determinante ist. Das heißt,

$$\begin{aligned} (\det B)^{-1}(\det AB) &= \varphi(A) = \det A \\ \Rightarrow \det AB &= (\det A)(\det B). \end{aligned}$$

Aufgabe 7

[Plücker-Koordinaten und Plücker-Relation]

Ein Ebene in $\mathbb{R}^k$ wird durch zwei nicht kollineare Vektoren, sagen wir $\vec{u}, \vec{v}$, definiert. Man kann die Matrix M konstruieren, deren erste Zeile die Koordinaten von $\vec{u}$ in der Standardbasis enthält, und deren zweite Zeile die Koordinaten von $\vec{v}$. Dann berechnet man die Plücker-Koordinaten $(p_{i,j})_{1 \leq i < j \leq k}$. Es gibt $\frac{k(k-1)}{2}$ Plücker-Koordinaten; wir bezeichnen den Vektor dieser Koordinaten als $p(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^{k(k-1)/2}$.

Wenn wir nun eine andere Basis desselben Ebenes wählen, sagen wir $(\vec{u}', \vec{v}')$, existiert eine invertierbare Matrix $A \in M_{2,2}$, so dass

$$\begin{pmatrix} \vec{u}' \\ \vec{v}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die neue Matrix dieser Basis $M' = AM$. Die Plücker-Koordinaten der neuen Matrix sind

$$p'_{i,j} = \det \begin{pmatrix} m_{1,i} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,j} \end{pmatrix} = \det(A) p_{i,j}.$$

Daher liefern alle Parametrisierungen desselben Ebenes dieselben Plücker-Koordinaten bis auf einen multiplikativen Faktor.

Darüber hinaus ist es für einen Ebene $P \subset \mathbb{R}^k$ mit einer Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ unmöglich, dass alle $p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v})$ null sind. Denn andernfalls wären für jedes $i < j$ die Vektoren (u_i, v_i) und (u_j, v_j) in $\mathbb{R}^2$ kollinear, da

$$0 = p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist mindestens einer der (u_i, v_i) ungleich null (sonst wäre $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$), sagen wir $v_1 \neq 0$. Dann gilt für alle i :

$$\frac{u_i}{v_i} = \frac{u_1}{v_1},$$

was genau die Bedingung ist, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind. Dies ist unmöglich, da $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = P$ ein Ebene ist.

Damit kann man für einen Ebene $P \subset \mathbb{R}^k$ die Menge

$$p(P) = \{p(\vec{u}, \vec{v}) ; \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = P\}$$

konstruieren. Die obige Argumentation zeigt, dass $p(P)$ eine Gerade in $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$ ist.

Wir werden zeigen, dass diese Abbildung injektiv ist. Sei dazu P eine Ebene in $\mathbb{R}^k$ und $(\vec{u}, \vec{v})$ eine Basis von P . Angenommen, wir kennen $p(\vec{u}, \vec{v})$; wir wollen beweisen, dass wir P rekonstruieren können.

Nach dem vorherigen Argument wissen wir, dass mindestens eine der Plücker-Koordinaten $p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v})$ ungleich null ist, sagen wir $p_{I,J}(\vec{u}, \vec{v})$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} u_I & u_J \\ v_I & v_J \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, da ihr Determinant $p_{I,J}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ ist.

Daher liefert die Matrix $AM = (\vec{x}, \vec{y})$ erneut eine Basis $(\vec{x}, \vec{y})$ von P , wobei die Spalte I von AM

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und die Spalte } J \text{ ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$p_{I,j}(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \cdot y_j - 0 \cdot x_j = y_j, \quad p_{i,J}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \cdot y_i - 1 \cdot x_i = -x_i.$$

Da wir alle Plücker-Koordinaten $p(\vec{x}, \vec{y}) = p(\vec{u}, \vec{v})$ kennen, kennen wir die ganze Matrix AM und damit eine Basis von P . Somit ist die Abbildung

$$P \mapsto p(P)$$

injektiv von der Menge der Pläne in $\mathbb{R}^k$ in die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$.

Man kann aus $p(P)$ eine "kanonische" Basis von P konstruieren: Man wählt das kleinste J mit $p_{1,J}(P) \neq 0$, und die beiden Zeilen der folgenden Matrix liefern eine Basis von P (Achtung auf die Indizes):

$$\frac{1}{p_{1,J}} \begin{pmatrix} p_{1,J} & p_{2,J} & p_{3,J} & \cdots & p_{J-1,J} & 0 & -p_{J+1,J} & -p_{J+2,J} & \cdots & -p_{k,J} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{1,J} & p_{1,J+1} & p_{1,J+2} & \cdots & p_{1,k} \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir vier verschiedene Indizes $i < j < k < l$ und die folgende Matrix:

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} m_{1,i} & m_{1,k} & m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,k} & m_{2,k} & m_{2,j} \\ \hline m_{1,i} & m_{1,l} & m_{1,j} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,l} & m_{2,j} & m_{2,l} \end{array} \right).$$

Man kann die Determinante von M blockweise berechnen:

$$\det M = \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,k} \\ m_{2,i} & m_{2,k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{1,j} & m_{1,l} \\ m_{2,j} & m_{2,l} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,k} & m_{2,j} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,l} \end{vmatrix} = p_{i,k}p_{j,l} + p_{j,k}p_{i,l}.$$

Wenn man die beiden mittleren Spalten von M vertauscht, ergibt sich die Determinante $-\det M$, und erneut blockweise:

$$-\det M = \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,k} & m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,k} & m_{2,k} & m_{2,j} \\ m_{1,i} & m_{1,j} & m_{1,l} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,j} & m_{2,l} & m_{2,l} \end{vmatrix} = p_{i,k} \cdot 0 - p_{i,j}(-p_{j,k}) = p_{i,j}p_{j,k}.$$

Damit erhält man die gewünschte Beziehung. Daraus folgt, dass ein Richtungsvektor einer Geraden in $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$, der diese Gleichungen (so viele wie Vierer-Tupel) nicht erfüllt, nicht die Plücker-Koordinaten eines Ebenes in $\mathbb{R}^k$ sein kann: Die Abbildung $P \mapsto p(P)$ ist keine Bijektion.

Anmerkung: Es ist jedoch deutlich schwieriger zu zeigen, dass jede Gerade in $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$, die die Plücker-Relationen erfüllt, tatsächlich von der Form $p(P)$ ist. Die Plücker-Abbildung $P \mapsto p(P)$ liefert sehr wichtige Informationen über die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $\text{Gr}(2, k)$, die Menge der

Pläne in $\mathbb{R}^k$, und verallgemeinert sich zur Untersuchung der Grassmann-Mannigfaltigkeit $\text{Gr}(n, k)$, der Menge der n -dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^k$.

Aufgabe 8

[Determinant durch 13 teilbar ist]

Ein Determinant ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile eine Linearkombination der anderen Zeilen addiert. Hier addieren wir zur dritten Zeile das Zehnfache der zweiten und das Hundertfache der ersten. Man erhält:

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 546 & 273 & 169 \end{pmatrix}.$$

Nun sind alle Einträge der letzten Zeile durch 13 teilbar, und der Determinant ist gleich

$$13 \times \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 42 & 21 & 13 \end{pmatrix}.$$

Dies ist also eine ganze Zahl, die durch 13 teilbar ist.

Aufgabe 9

[Ein schöner Determinant]

Bezeichnen wir diesen Determinanten mit $D_n(s_1, \dots, s_n)$. Wir beweisen durch vollständige Induktion über n , dass für alle reellen Zahlen $s_1, \dots, s_n$ gilt:

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1}).$$

Für die ersten Werte von n lässt sich diese Beziehung leicht überprüfen. Angenommen, die Aussage gilt für $n-1$. Wir zeigen sie nun für n , indem wir die erste Spalte von allen übrigen Spalten subtrahieren. Dann erhalten wir

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \cdots & s_2 - s_1 \\ s_2 - s_1 & \cdots & s_3 - s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1 D_{n-1}(s_2 - s_1, s_3 - s_1, \dots, s_n - s_1).$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme erhalten wir

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_1 - s_2 + s_1) \cdots (s_n - s_1 - s_{n-1} + s_1) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1}).$$

Man kann dieses Resultat auch ohne Induktion beweisen, indem man die folgende Folge von Zeilenoperationen (in dieser Reihenfolge) ausführt:

$$\begin{aligned} L_n - L_{n-1} &\rightarrow L_n, \\ L_{n-1} - L_{n-2} &\rightarrow L_{n-1}, \\ &\vdots \\ L_2 - L_1 &\rightarrow L_2. \end{aligned}$$

Man erhält dann eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge $s_1, s_2 - s_1, \dots, s_n - s_{n-1}$ sind, was das Ergebnis unmittelbar liefert.

Aufgabe 10

[Begleitmatrix]

Durch Entwicklung nach der letzten Spalte erhält man:

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} -x & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix} = (-x)^{n-1}(a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} a_k \Delta_k,$$

wobei Δ_k der folgende Determinant ist (wobei $-x$ genau k -mal auf der Diagonalen erscheint):

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & -x & 0 & * & \cdots & * \\ & & & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Dieser Determinant Δ_k lässt sich blockweise berechnen, da die Matrix eine obere Block-Dreiecksmatrix ist. Außerdem sind die Diagonalblöcke selbst wieder Dreiecksmatrizen (der erste ist untere, der zweite obere Dreiecksmatrix). Daraus folgt

$$\Delta_k = (-x)^k \cdot 1^{n-1-k}.$$

Somit erhalten wir

$$\det(A - xI_n) = (-x)^{n-1}(a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} (-1)^k a_k x^k = (-1)^n \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right).$$